

实验条件不完美对薛定谔猫态制备的影响

张娜娜 李淑静 闫红梅 何亚亚 王海

Effect of imperfect experimental condition on generation of Schrödinger cat state

Zhang Na-Na Li Shu-Jing Yan Hong-Mei He Ya-Ya Wang Hai

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 67, 234203 (2018) DOI: 10.7498/aps.67.20180381

在线阅读 View online: <http://dx.doi.org/10.7498/aps.67.20180381>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn/CN/Y2018/V67/I23>

---

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

音频段  $1.34 \mu\text{m}$  压缩态光场的实验制备

Generation of audio-band frequency squeezed light at  $1.34 \mu\text{m}$

物理学报.2018, 67(17): 174203 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.67.20180301>

光和原子关联与量子计量

Quantum metrology with atom and light correlation

物理学报.2018, 67(16): 164204 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.67.20180895>

铷原子 D1 线真空压缩光场的产生及态重构

Generation and quantum state reconstruction of a squeezed vacuum light field resonant on the rubidium D1 line

物理学报.2018, 67(9): 094204 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.67.20172396>

连续变量纠缠态光场在光纤中传输特性的实验研究

Experimental investigation of transmission characteristics of continuous variable entangled state over optical fibers

物理学报.2018, 67(2): 024203 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.67.20171542>

连续变量  $1.34 \mu\text{m}$  量子纠缠态光场的实验制备

Continuous variable quantum entanglement at  $1.34 \mu\text{m}$

物理学报.2017, 66(24): 244205 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.66.244205>

## 实验条件不完美对薛定谔猫态制备的影响\*

张娜娜<sup>1)</sup> 李淑静<sup>1)2)†</sup> 闫红梅<sup>1)</sup> 何亚亚<sup>1)</sup> 王海<sup>1)2)</sup>

1) (山西大学光电研究所, 量子光学与光量子器件国家重点实验室, 太原 030006)

2) (山西大学, 极端光学协同创新中心, 太原 030006)

(2018年3月2日收到; 2018年9月27日收到修改稿)

薛定谔猫态是一类重要的非经典光场, 实验上可以通过真空压缩态减光子的方案获得. 本文从理论上研究了实验条件对制备薛定谔猫态的影响, 主要考虑了包括压缩态的压缩度和纯度、单光子探测器的效率及噪声以及零拍探测器的效率等诸多因素的影响. 理想情况下通过减光子方案制备得到的薛定谔猫态为奇光子数态, 其相空间原点的Wigner函数为负值是其非经典特性的重要判据, 而保真度可以度量制备态与理想猫态之间的相似程度. 在压缩态为非纯态以及单光子探测器为商用低效率阈值探测器的情况下, 计算了制备猫态的保真度、Wigner函数及其相空间原点处 $W(0)$ 的表达式, 分析了实验条件对薛定谔猫态制备的影响, 为制备高质量的薛定谔猫态提供了理论指导.

关键词: 薛定谔猫态, 减光子方案, Wigner函数, 保真度

PACS: 42.50.-p, 42.50.Dv, 03.65.Wj

DOI: 10.7498/aps.67.20180381

## 1 引言

薛定谔猫态, 又称宏观量子叠加态<sup>[1-8]</sup>, 因其独特的非经典特性, 一直以来都是人们的研究热点. 薛定谔猫态还是一类重要的非高斯态, 可以用于量子隐形传输<sup>[9]</sup>, 量子计算<sup>[10,11]</sup>等. 过去的二十几年间, 在原子系综<sup>[12]</sup>、固态系统<sup>[13]</sup>和光学系统<sup>[14,15]</sup>中一些薛定谔猫态的产生方法被相继提出, 目前实验上最常用的方法是通过真空压缩态减光子获得薛定谔猫态<sup>[16-24]</sup>. 2004年, 法国Grangier研究组在实验上通过减光子方案将压缩光场转换到非高斯光场<sup>[21]</sup>. 2006年, 丹麦Polzik研究组制备了852 nm薛定谔猫态, 猫态幅度 $\alpha = 1.3$ , 保真度为53%<sup>[16]</sup>. 2007年, 日本Furusawa研究组获得了860 nm的薛定谔猫态<sup>[19]</sup>, 经过不断优化, 2017年他们将制备猫态的保真度提高到78%<sup>[22]</sup>, 其中猫态幅度 $|\alpha|^2 = 1.02$ . 2014年, 法国Laurat研究组制备了1064 nm的薛定谔猫态, 猫态幅度 $|\alpha|^2 \approx 1$ , 保真度为65%<sup>[23]</sup>. 理想情况下, 具有一定

压缩度的真空压缩纯态通过分束器减掉一个光子, 其输出态与猫态有很高的保真度<sup>[18,25]</sup>. 然而在猫态制备过程中, 实验条件的不完美将会对猫态质量产生影响.

Suzuki等<sup>[18]</sup>研究了减光子方案中 $W(0)$ 与压缩光场的压缩度和阈值单光子探测器的探测效率及暗计数的关系, Kim等<sup>[17]</sup>研究了 $W(0)$ 与压缩光场的压缩纯度、压缩度和平衡零拍探测损耗的关系. 在此基础上, 我们综合考虑了压缩态的压缩度和纯度、阈值单光子探测器的效率和暗计数以及平衡零拍探测的损耗等因素, 系统地研究了实验参数对猫态制备的影响. 理想情况下通过减光子方案制备到的薛定谔猫态为奇光子数态, 其Wigner函数在相空间原点呈现出负值, 而保真度可以度量制备态与理想猫态的相似程度. 本文通过相空间特征函数的方法建立了压缩态减光子理论模型, 得到了制备态的Wigner函数、相空间原点值 $W(0)$ 以及与理想猫态保真度的解析表达式, 对 $W(0)$ 值及保真度随各个实验参数的变化关系进行了计算和分析, 为制备高质量的猫态提供了理论指导.

\* 国家重点研发计划(批准号: 2016YFA0301402)、国家自然科学基金(批准号: 11475109, 11834010, 11604191)和山西省“1331工程”重点学科建设计划资助的课题.

† 通信作者. E-mail: lishujing@sxu.edu.cn

## 2 真空压缩场减光子制备薛定谔猫态的理论模型

利用真空压缩减光子获得薛定谔猫态的原理如图 1 所示. 真空压缩态  $|s\rangle_1$  输入到分束器 BS1 (透过率为  $T = t^2$ , 反射率为  $R = r^2$ ), 一部分光场被反射进入单光子探测器, 当单光子探测器探测到一个光子时, 从 BS1 透射的光场被制备到减光子压缩态, 这个态在一定条件下与薛定谔猫态有很高的保真度. 真空压缩态  $|s\rangle_1$  ( $s$  代表压缩度) 的 Weyl 特征函数为

$$C(\xi) = \exp\left[-\frac{A}{2}(\xi_r)^2 - \frac{B}{2}(\xi_i)^2\right], \quad (1)$$

其中  $A$  与  $B$  分别为光场压缩和反压缩分量的噪声起伏方差,  $\xi_r$  与  $\xi_i$  分别为特征参数  $\xi$  的实部和虚部. 压缩态的纯度 [26,27] 与噪声起伏方差  $A$  和  $B$  直接相关,  $\mu = 1/\sqrt{AB}$ . 在实验上经常用压缩度  $s$  和反压缩度  $s'$  来描述光场的噪声特性, 压缩度 (反压缩度) 与压缩噪声起伏方差 (反压缩噪声起伏方差) 之间的关系为  $s = 10 \log A$  ( $s' = 10 \log B$ ).

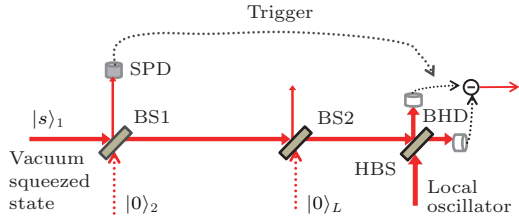


图 1 真空压缩减光子制备猫态的原理图 BS1-2, 分束器; HBS, 50/50 分束器; SPD, 单光子探测器;  $|s\rangle_1$ , 真空压缩态;  $|0\rangle_2$ — $|0\rangle_L$ , 真空态; BHD, 平衡零拍探测

Fig. 1. Principle diagram of generation of Cat State by subtracting photons from the vacuum squeezed state. BS1-2, beam splitter; HBS, 50 : 50 beam splitter; SPD, single photon detector;  $|s\rangle_1$ , vacuum squeezed state;  $|0\rangle_2$ — $|0\rangle_L$ , vacuum state; BHD, balanced homodyne detector.

经过分束器 BS1 后输出态的 Weyl 特征函数为 [28]

$$C_{\text{out}} = \exp\left(-\frac{1}{2}XVX^T\right), \quad (2)$$

其中  $X = (\varepsilon_r, \varepsilon_i, \xi_r, \xi_i)$ ,  $V = \begin{pmatrix} n_1 & 0 & c_1 & 0 \\ 0 & n_2 & 0 & c_2 \\ c_1 & 0 & m_1 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 & m_2 \end{pmatrix}$ ,  $n_1 = TA + R$ ,  $n_2 = TB + R$ ,  $c_1 = \text{Tr}(A - 1)$ ,

$c_2 = \text{Tr}(B - 1)$ ,  $m_1 = RA + T$ ,  $m_2 = RB + T$ . 经过分束器 BS1 后输出态的密度算符可表示为

$$\hat{\rho}_{\text{out}} = \frac{1}{\pi^2} \int d^2\xi d^2\varepsilon C_{\text{out}}(\varepsilon, \xi) \hat{D}_1(-\varepsilon) \hat{D}_2(-\xi), \quad (3)$$

$\hat{D}(\xi) = \exp(\xi\hat{a}^+ - \xi^*\hat{a})$  为位移算符,  $\hat{a}$  与  $\hat{a}^+$  分别为光子数湮没与产生算符. 当单光子探测器测量到一个光子的情况下, BS1 透射场的密度算符被投影到

$$\hat{\rho}_1 = N \langle 1 | \hat{\rho}_{\text{out}} | 1 \rangle_2; \quad (4)$$

$N$  为归一化因子. 利用公式  $C(\xi) = \text{Tr}[\hat{D}(\xi)\hat{\rho}]$  可求得 BS1 透射光场的 Weyl 特征函数:

$$C_1 = \exp\left[-\frac{1}{2}G_1\zeta_r^2 - \frac{1}{2}G_2\zeta_i^2\right] \times \left[1 - \frac{c_1^2 M_2 \zeta_r^2}{M_1(m_1 m_2 - 1)} - \frac{c_2^2 M_1 \zeta_i^2}{M_2(m_1 m_2 - 1)}\right]. \quad (5)$$

将 Weyl 特征函数经过傅里叶变换可得到 Wigner 函数:

$$W(\alpha) = \frac{1}{\pi^2} \int d^2\zeta C_1(\zeta) \exp(\alpha\zeta^* - \alpha^*\zeta).$$

计算可得:

$$W(\alpha) = \frac{1}{\pi} \exp\left[-\frac{2\text{Im}(\alpha)^2}{G_1}\right] \times \exp\left[-\frac{2\text{Re}(\alpha)^2}{G_2}\right] \times \left\{ \frac{2}{\sqrt{G_1 G_2}} - \frac{c_1^2 M_2}{M_1(m_1 m_2 - 1)} \times \left[ \frac{2}{\sqrt{G_1^3 G_2}} - \frac{8\text{Im}(\alpha)^2}{G_1^2} \times \frac{2}{\sqrt{G_1 G_2}} \right] - \frac{c_2^2 M_1}{M_2(m_1 m_2 - 1)} \times \left[ \frac{2}{\sqrt{G_1 G_2}} - \frac{8\text{Re}(\alpha)^2}{G_2^2} \times \frac{2}{\sqrt{G_1 G_2}} \right] \right\}, \quad (6)$$

其中  $M_1 = m_1 + 1$ ,  $M_2 = m_2 + 1$ ,  $G_1 = n_1 - \frac{c_1^2}{m_1 + 1}$ ,  $G_2 = n_2 - \frac{c_2^2}{m_2 + 1}$ . Wigner 函数原点值  $W(0)$  为

$$W(0) = \frac{2}{\pi} \frac{1}{\sqrt{G_1 G_2}} - \frac{2}{\pi} \frac{c_1^2 M_2}{M_1(m_1 m_2 - 1)} \frac{1}{\sqrt{G_1^3 G_2}} - \frac{2}{\pi} \frac{c_2^2 M_1}{M_2(m_1 m_2 - 1)} \frac{1}{\sqrt{G_1 G_2^3}}. \quad (7)$$

接下来计算了制备态与理想猫态之间的保真度. 两个量子态之间的保真度可以表示为 [17]

$$F = \frac{1}{\pi} \int d^2\zeta C_1(\zeta) C_{|\text{cat}\rangle}(\zeta), \quad (8)$$

其中  $C_{|\text{cat}^-}\rangle(\zeta)$  为猫态

$$|\text{cat}^- \rangle = \frac{1}{N_-} (|\alpha \rangle - |-\alpha \rangle)$$

的 Weyl 特征函数,

$$C_{|\text{cat}^-}\rangle(\zeta) = \frac{1}{(N_-)^2} \times e^{-\frac{|\zeta|^2}{2}} (2 \times e^{2i\alpha\zeta_i} - 2 \times e^{-2|\alpha|^2} \times e^{2\alpha\zeta_r}), \quad (9)$$

$N_- = \sqrt{2(1 - e^{-2|\alpha|^2})}$ ,  $\alpha$  为猫态的幅度 (计算过程中取  $\alpha$  为实数). 理想情况下, 减光子压缩态与猫态

的保真度

$$F_{\alpha,\chi} = \frac{2\alpha^2 e^{\alpha^2[\tanh(\chi)-1]}}{[\cosh(\chi)]^3 (1 - e^{-2\alpha^2})},$$

其中  $\chi$  为压缩参数 [17]. 对于给定的压缩参数  $\chi$ , 对保真度求导且令导数为 0, 可求得制备猫态的最优化等效幅度

$$\alpha = \sqrt{\frac{3}{2} \sinh(2\chi)}.$$

压缩度  $s$  和压缩参数  $\chi$  均用来表示光场的压缩噪声, 它们之间的关系为  $e^{-2\chi} = 10^{s/10}$ . 将 (5) 式和 (9) 式代入 (8) 式求得保真度的表达式为

$$F = \frac{2}{(N_-)^2} \times \left\{ e^{\frac{-2\alpha^2}{G_2+1}} \left[ \frac{2}{\sqrt{(G_1+1)(G_2+1)}} - \frac{c_1^2 M_2}{M_1(m_1 m_2 - 1)} \frac{2}{\sqrt{(G_1+1)^3(G_2+1)}} - \frac{c_2^2 M_1}{M_2(m_1 m_2 - 1)} \left( \frac{2}{\sqrt{(G_1+1)(G_2+1)^3}} - \frac{4\alpha^2}{(G_2+1)^2} \frac{2}{\sqrt{(G_1+1)(G_2+1)}} \right) \right] - e^{\frac{2\alpha^2}{G_1+1}} e^{-2\alpha^2} \left[ \frac{2}{\sqrt{(G_1+1)(G_2+1)}} - \frac{c_2^2 M_1}{M_2(m_1 m_2 - 1)} \frac{2}{\sqrt{(G_1+1)(G_2+1)^3}} - \frac{c_1^2 M_2}{M_1(m_1 m_2 - 1)} \left( \frac{2}{\sqrt{(G_1+1)^3(G_2+1)}} + \frac{4\alpha^2}{(G_1+1)^2} \frac{2}{\sqrt{(G_1+1)(G_2+1)}} \right) \right] \right\}. \quad (10)$$

利用 (7) 式和 (10) 式, 分别计算了  $W(0)$  值和保真度随压缩纯度  $\mu$  的变化曲线, 如图 2(a) 和图 2(b) 所示, 其中 BS1 透过率取为 95%. 黑实线、红点线和蓝点划线的压缩度分别为 -3, -2 和 -1 dB, 对应的压缩噪声起伏方差分别为 0.5, 0.63 和 0.79, 保真度计算中对应猫态的最优化幅度  $\alpha$  分别为 1.06, 0.85 和 0.597. 图 2(a) 中灰色的虚线表示  $W(0) = 0$ , 从图中可以看出压缩度越

大,  $W(0) < 0$  对压缩纯度的要求越低. 当压缩度  $s = -1$  dB 时, 压缩纯度需满足  $\mu > 70\%$ ; 当  $s = -2$  dB 时,  $\mu > 83\%$ . 对于给定的压缩度, 保真度随压缩纯度的增大而增大. 在相同纯度下, 大的压缩度对应高的保真度; 压缩度增大意味着压缩光场中混入的奇光子数态布居降低, 导致减光子后制备态中的偶光子数态布居减小、保真度增大.

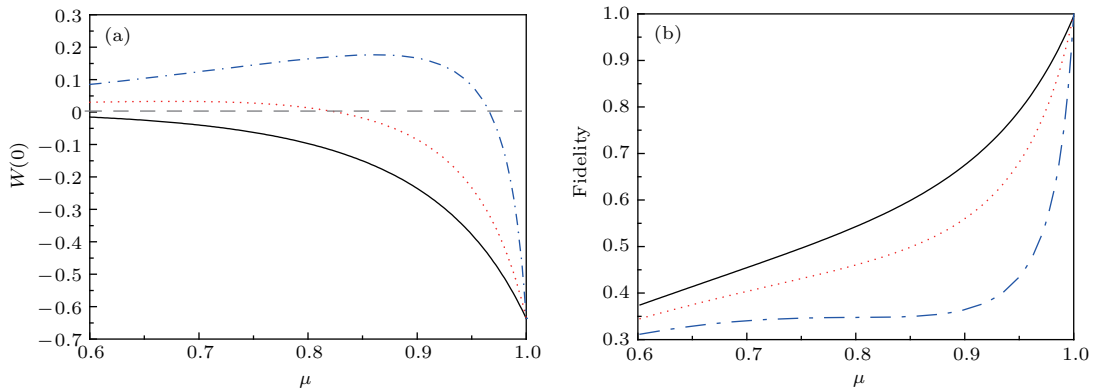


图 2  $W(0)$  值 (a) 和保真度 (b) 随压缩纯度  $\mu$  的变化, 黑实线、红点线和蓝点划线的压缩度分别为 -3, -2 和 -1 dB  
Fig. 2. Dependence of the value of  $W(0)$  and the fidelity on the squeezing purity. The squeezing degree are -3 dB (black solid line), -2 dB (red dot line), and -1 dB (blue dot dash line), respectively.

猫态的幅度是量子计算中一个备受关注的指标. 我们计算了制备猫态的保真度随幅度的变化, 如图 3 所示, 其中 BS1 透过率取为 95%. 黑实线、红点线和蓝点划线的压缩纯度分别为 1.0, 0.9 和 0.7. 当纯度为 1 时,  $|\alpha| \leq 1.2$  的幅度范围内保真度超过了 99%, 之后保真度随幅度的增加快速降低. 这是因为减光子真空压缩态的光子数分布随光子数增加单调递减, 而理想猫态的光子数分布在  $|\alpha|^2$  附近出现峰值. 当纯度不为 1 时, 在小幅度范围内保真度呈增加趋势, 我们对其原因进行了分析. 非纯态的压缩光场中除了偶光子数态还包含有奇光子数态, 对于给定纯度的压缩光场, 随着压缩度 (对应猫态幅度) 增加, 其偶光子态布居增大, 减光子后制备态中的奇光子数态布居相应增加, 与猫态的保真度随之增大. 实验中不能取过高的压缩度, 只有在合适的压缩度下, 制备光场与理想猫态之间才会达到较高的保真度 [29].

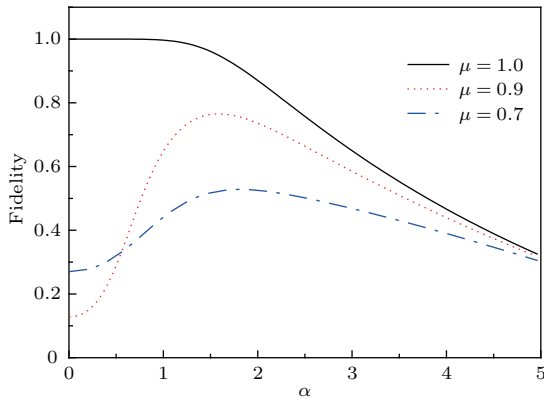


图 3 制备猫态的保真度随幅度  $\alpha$  的变化, 黑实线、红点线和蓝点划线的压缩纯度分别为 1.0, 0.9 和 0.7

Fig. 3. The fidelity of prepared cat state as a function of amplitude  $\alpha$ . The squeezing purity are 1.0 (black solid line), 0.9 (red dot line) and 0.7 (blue dash dot line), respectively.

### 3 单光子探测器的不完美对薛定谔猫态制备的影响

目前商用的单光子探测器绝大部分不能区分光子数, 量子效率  $\eta_{\text{apd}}$  较低, 并且有一定的暗计数. 这种探测器为阈值探测器, 当一个或多个光子到达探测器被探测到, 探测器即被触发处于 “on” 状态. 阈值单光子探测器 “off” 状态的投影算符为

$$\hat{\Pi}^{\text{off}} = \sum_{n=0}^{\infty} (1 - \eta_{\text{apd}})^n e^{-\nu} |n\rangle_2 \langle n|,$$

其中  $\eta_{\text{apd}}$  为单光子探测器的量子效率,  $\nu$  为单光子探测器的暗计数. 阈值单光子探测器 “on” 状态的投影算符为

$$\hat{\Pi}^{\text{on}} = \hat{1} - \sum_{n=0}^{\infty} (1 - \eta_{\text{apd}})^n e^{-\nu} |n\rangle_2 \langle n|.$$

当阈值单光子探测器处于 “on” 状态时, BS1 透射场的密度矩阵为

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_\beta &= N_1 \left( \sum_{n=0}^{\infty} {}_2\langle n| \hat{\Pi}^{\text{on}} \hat{\rho}_{\text{out}} |n\rangle_2 \right) \\ &= N_1 \left( \sum_{n=0}^{\infty} {}_2\langle n| \hat{\rho}_{\text{out}} |n\rangle_2 \right. \\ &\quad \left. - e^{-\nu} \sum_{n=0}^{\infty} (1 - \eta_{\text{apd}})^n {}_2\langle n| \hat{\rho}_{\text{out}} |n\rangle_2 \right) \\ &= \frac{N_1}{\pi^2} \int d^2\varepsilon d^2\xi C_{\text{out}}(\varepsilon, \xi) \hat{D}_1(-\varepsilon) \\ &\quad \times \sum_{n=0}^{\infty} \left[ 1 - e^{-\nu} \sum_{n=0}^{\infty} (1 - \eta_{\text{apd}})^n \right] \\ &\quad \times {}_2\langle n| \hat{D}_2(-\xi) |n\rangle_2, \end{aligned} \quad (11)$$

其中  $N_1$  为归一化因子. 对应的 Weyl 特征函数为

$$\begin{aligned} C_\beta &= \text{Tr} \left[ \hat{D}(\zeta) \hat{\rho}_\beta \right] \\ &= \frac{N_1}{\pi} \int d^2\xi C_{\text{out}}(\zeta, \xi) \\ &\quad \times \sum_{n=0}^{\infty} \left[ 1 - e^{-\nu} \sum_{n=0}^{\infty} (1 - \eta_{\text{apd}})^n \right] \\ &\quad \times {}_2\langle n| \hat{D}_2(-\xi) |n\rangle_2. \end{aligned} \quad (12)$$

将 (12) 式经过傅里叶变换即可得到对应的 Wigner 函数:

$$W_\beta(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} W_n(\alpha), \quad (13)$$

其中,

$$\begin{aligned} W_n(\alpha) &= \frac{N_1}{\pi^2} \int d\zeta_r d\zeta_i \int d\xi_r d\xi_i C_{\text{out}}(\zeta, \xi) \\ &\quad \times \exp[2i \text{Im}(\alpha)\zeta_r - 2i \text{Re}(\alpha)\zeta_i] \\ &\quad \times [1 - e^{-\nu} (1 - \eta_{\text{apd}})^n] {}_2\langle n| \hat{D}_2(-\xi) |n\rangle_2. \end{aligned}$$

下面计算 BS1 反射端的光子数分布概率. 分束器 BS1 的反射端的密度算符为

$$\hat{\rho}_{2\text{out}} = \frac{1}{\pi} \int d^2\xi C_{\text{out}}(0, \xi) D_2(-\xi),$$

其中  $C_{\text{out}}(0, \xi)$  为反射光场的 Weyl 特征函数. BS1 反射端的光子数分布概率可表示为

$$\begin{aligned} & \langle n | \hat{\rho}_{2\text{out}} | n \rangle \\ &= \frac{1}{\pi} \int C_{\text{out}}(0, \xi) \langle n | \hat{D}_2(-\xi) | n \rangle d\xi_r d\xi_i. \end{aligned}$$

当输入真空压缩态的压缩度为  $-3$  dB, 纯度为 1, BS1 的透射率为 0.95 的情况下, BS1 反射光路上出现  $|0\rangle, |1\rangle, |2\rangle, |3\rangle$  光子态的概率分别为 0.99396,

$0.00583, 2 \times 10^{-4}, 3.2 \times 10^{-6}$ . 从上面的结果可以看出: 光子数态出现的概率随着光子数的增加而递减,  $|3\rangle$  态出现的概率比  $|2\rangle$  态降低了两个量级, 本文计算过程当中忽略了  $n > 2$  的光子数态, BS1 透射光场的 Wigner 函数为

$$W_\beta(\alpha) = W_0(\alpha) + W_1(\alpha) + W_2(\alpha), \quad (14)$$

其中,

$$\begin{aligned} W_0(\alpha) &= \frac{N_1}{\pi} \exp \left[ -\frac{2 \text{Im}(\alpha)^2}{G_1} - \frac{2 \text{Re}(\alpha)^2}{G_2} \right] \times (1 - e^{-\nu}) \times \frac{4}{\sqrt{M_1 M_2 G_1 G_2}}, \\ W_1(\alpha) &= \frac{N_1}{\pi} \exp \left[ -\frac{2 \text{Im}(\alpha)^2}{G_1} - \frac{2 \text{Re}(\alpha)^2}{G_2} \right] \times [1 - e^{-\nu}(1 - \eta_{\text{apd}})] \times \left\{ \frac{4}{\sqrt{M_1 M_2 G_1 G_2}} - F_1 \right\}, \\ W_2(\alpha) &= \frac{N_1}{\pi} \exp \left[ -\frac{2 \text{Im}(\alpha)^2}{G_1} - \frac{2 \text{Re}(\alpha)^2}{G_2} \right] \times [1 - e^{-\nu}(1 - \eta_{\text{apd}})^2] \times \left[ \frac{4}{\sqrt{M_1 M_2 G_1 G_2}} - 2F_1 + \frac{1}{2}F_2 \right], \\ F_1 &= \frac{4}{\sqrt{M_1^3 M_2 G_1 G_2}} + \frac{4}{\sqrt{M_1 M_2^3 G_1 G_2}} + \frac{2}{\sqrt{M_1 M_2}} \left( \frac{c_1}{M_1} \right)^2 \times \left( \frac{2}{\sqrt{G_1^3 G_2}} - \frac{4 \text{Im}(\alpha)^2}{G_1^2} \frac{2}{\sqrt{G_1 G_2}} \right) \\ &\quad + \frac{2}{\sqrt{M_1 M_2}} \left( \frac{c_2}{M_2} \right)^2 \times \left( \frac{2}{\sqrt{G_1 G_2^3}} - \frac{4 \text{Re}(\alpha)^2}{(G_2)^2} \frac{2}{\sqrt{G_1 G_2}} \right), \\ F_2 &= \frac{12}{\sqrt{M_1^5 M_2 G_1 G_2}} + 12 \left( \frac{c_1}{M_1} \right)^2 \frac{1}{\sqrt{M_1^3 M_2}} \left( \frac{2}{\sqrt{G_1^3 G_2}} - \frac{4 \text{Im}(\alpha)^2}{G_1^2} \frac{2}{\sqrt{G_1 G_2}} \right) + 2 \left( \frac{c_1}{M_1} \right)^4 \frac{1}{\sqrt{M_1 M_2}} \\ &\quad \times \left( \frac{6}{\sqrt{G_1^5 G_2}} - \frac{4 \text{Im}(\alpha)^2}{G_1^2} \frac{12}{\sqrt{G_1^3 G_2}} + \frac{16 \text{Im}(\alpha)^4}{G_1^4} \frac{2}{\sqrt{G_1 G_2}} \right) + \frac{12}{\sqrt{M_1 M_2^5 G_1 G_2}} + 12 \left( \frac{c_2}{M_2} \right)^2 \frac{1}{\sqrt{M_1 M_2^3}} \\ &\quad \times \left( \frac{2}{\sqrt{G_1 G_2^5}} - \frac{4 \text{Re}(\alpha)^2}{G_2^2} \frac{12}{\sqrt{G_1 G_2}} \right) + 2 \left( \frac{c_2}{M_2} \right)^4 \frac{1}{\sqrt{M_1 M_2}} \left( \frac{6}{\sqrt{G_1 G_2^5}} - \frac{4 \text{Re}(\alpha)^2}{G_2^2} \frac{12}{\sqrt{G_1 G_2^3}} \right. \\ &\quad \left. + \frac{16 \text{Re}(\alpha)^4}{G_2^4} \frac{2}{\sqrt{G_1 G_2}} \right) + \frac{8}{\sqrt{M_1^3 M_2^3 G_1 G_2}} + \frac{4}{\sqrt{M_1^3 M_2}} \left( \frac{c_2}{M_2} \right)^2 \left( \frac{2}{\sqrt{G_1 G_2^3}} - \frac{4 \text{Re}(\alpha)^2}{G_2^2} \frac{2}{\sqrt{G_1 G_2}} \right) \\ &\quad + \frac{4}{\sqrt{M_1 M_2^3}} \left( \frac{c_1}{M_1} \right)^2 \left( \frac{2}{\sqrt{G_1^3 G_2}} - \frac{4 \text{Im}(\alpha)^2}{G_1^2} \frac{2}{\sqrt{G_1 G_2}} \right) + \frac{4}{\sqrt{M_1 M_2}} \left( \frac{c_1 c_2}{M_1 M_2} \right)^2 \\ &\quad \times \left( \sqrt{\frac{2}{G_1^3}} - \frac{4 \text{Im}(\alpha)^2}{G_1^2} \sqrt{\frac{2}{G_1}} \right) \left( \sqrt{\frac{2}{G_2^3}} - \frac{4 \text{Re}(\alpha)^2}{G_2^2} \sqrt{\frac{2}{G_2}} \right). \end{aligned}$$

利用公式  $F = \frac{1}{\pi} \int d^2 \zeta C_\beta(\zeta) C_{|\text{cat}\rangle}(\zeta)$ , 我们对单光子探测器不完美的情况下制备态与理想猫态的保真度进行了计算. 图 4(a) 和图 4(b) 分别是  $W(0)$  和保真度随单光子探测器的量子效率的变化曲线. 计算中输入真空压缩的压缩度取为  $-3$  dB, BS1 透过率取为 95%, 单光子探测器暗计数为  $\nu = 10^{-5}$ . 图中黑实线、红点线和蓝点划线的压缩纯度分别为 1.0, 0.9 和 0.7. 从图 4 可知,  $W(0)$  和保真度对探测器的量子效率  $\eta_{\text{apd}}$  不敏感, 它们的值主要取决于压缩纯度. 显然, 在压缩纯度较低的情

况下, 通过提高单光子探测器的量子效率使  $W(0)$  值负性和保真度增大的作用是很微弱的.

单光子探测器的暗计数也是影响猫态制备的一个主要因素, 由于暗计数的出现, 使制备态中混入了真空压缩态,  $W(0)$  值负性减小、保真度降低. 图 5(a) 和图 5(b) 分别是  $W(0)$  和保真度随单光子探测器暗计数的变化曲线. 计算中输入真空压缩的压缩度取为  $-3$  dB, BS1 透过率取为 95%, 单光子探测器的量子效率取为 70% (目前实验室使用的 800 nm 商用单光子探测器的量子效率可以达到这个水平). 由图可知, 随着暗计数增大,  $W(0)$  值的

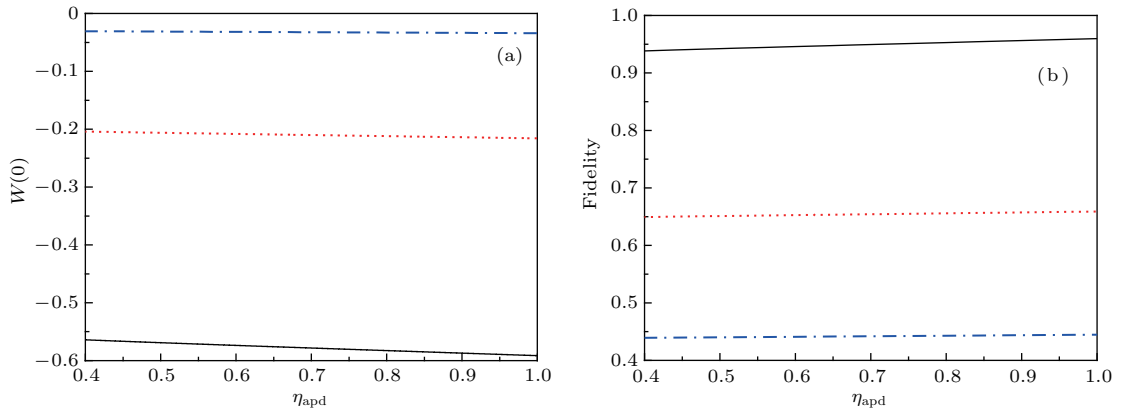


图4  $W(0)$  值 (a) 和保真度 (b) 随单光子探测器量子效率  $\eta_{\text{apd}}$  的变化, 黑实线、红点线和蓝点划线的压缩纯度分别为 1.0, 0.9 和 0.7

Fig. 4. Dependence of the value of  $W(0)$  (a) and fidelity (b) on the quantum efficiency of single-photon detector  $\eta_{\text{apd}}$ . The squeezing purity are 1.0 (black solid line), 0.9 (red dot line), and 0.7 (blue dot dash line), respectively.

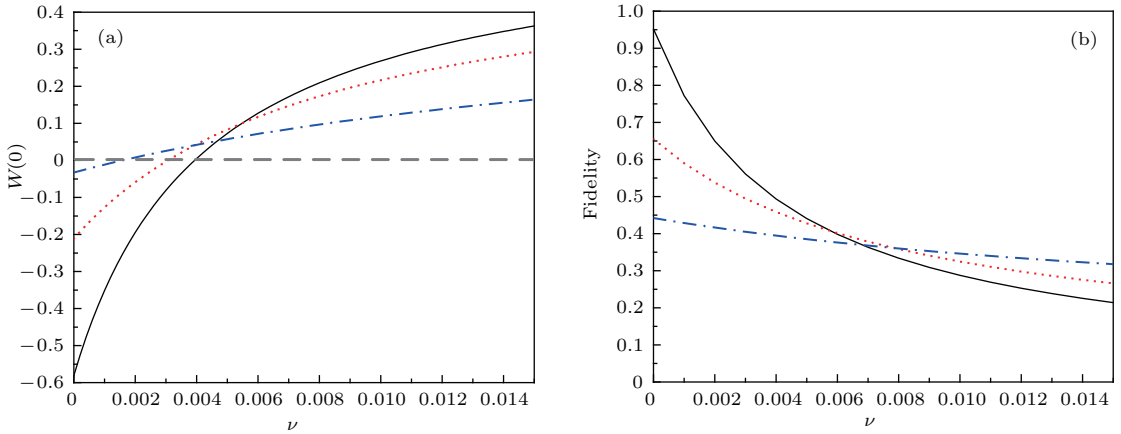


图5  $W(0)$  值 (a) 和保真度 (b) 随暗计数  $\nu$  的变化, 黑实线、红点线和蓝点划线的压缩纯度分别为 1.0, 0.9 和 0.7

Fig. 5. The value of  $W(0)$  (a) and the fidelity (b) as a function of the dark count rate  $\nu$ . The squeezing purity are 1.0 (black solid line), 0.9 (red dot line), and 0.7 (blue dot dash line), respectively.

负性和保真度都逐渐减小。从图 5(a) 可以看出, 压缩纯度越小,  $W(0) < 0$  对暗计数  $\nu$  的要求越高。当压缩纯度  $\mu = 1$  时,  $W(0) < 0$  要求暗计数  $\nu < 4 \times 10^{-3}$ ; 当  $\mu = 0.7$  时,  $W(0) < 0$  要求  $\nu < 1.5 \times 10^{-3}$ 。这是因为暗计数的出现相当于在制备态中增加了  $|0\rangle$  态布居, 使  $W(0)$  值负性减小; 而高纯度压缩光场减光子后制备态中混入的偶光子态布居少,  $W(0)$  值负性大, 所以  $W(0) < 0$  对暗计数有较好的容忍度。从图 5(b) 可知压缩纯度越高, 保真度随暗计数的变化越敏感; 因为在相同的压缩度下, 纯度越高压缩光场中包含多光子态的成分越少, 致使单光子探测器产生较少的错误计数率 (探测到多光子的概率), 所以保真度对暗计数的变化敏感。暗计数是在没有光场输入的情况下探测器产生的计数噪声, 而杂散光场产生的计数噪声会对猫态的制备产生同

样的影响。在实验上可以从这方面入手对制备的猫态进行优化, 不仅要选择暗计数低的单光子探测器, 同时还要阻挡杂散光场进入单光子探测器。

#### 4 平衡零拍探测器的不完美对制备薛定谔猫态的影响

实验中需要用到平衡零拍探测器 (BHD) 对制备猫态的正交分量进行测量, BHD 不可避免地会引入损耗。一个不完美的平衡零拍探测系统等价于一个无损耗的平衡零拍探测器前加入一个分束器, 图 1 中 BS2 即是 BHD 损耗等效的分束器。分束器 BS2 的透过率相当于平衡零拍探测系统的总效率  $\eta$ ,  $\eta = \eta_b \gamma^2 \lambda$ , 其中  $\eta_b$  为平衡零拍探测器的量子效率,  $\gamma$  为平衡零拍探测系统中信号光与本振光的干

涉对比度,  $\lambda$  为光路传输效率. 在这种情况下, 真空压缩态减光子后测量得到的薛定谔猫态的 Wigner 函数形式就要发生一些变化.

经过 BS2 后, 透射光场的特征函数为

$$C_\gamma(\zeta) = C_\beta(\sqrt{\eta}\zeta)C_v(\sqrt{1-\eta}\zeta), \quad (15)$$

其中  $T' = t'^2 = \eta$ ,  $R' = r'^2 = 1 - \eta$ , 分别为 BS2 的透过率与反射率;  $C_v(\sqrt{1-\eta}\zeta)$  为输入到 BS2 的真空态的特征函数. BS2 透过光场的 Wigner 函数为<sup>[30]</sup>

$$W_\gamma(\alpha) = \frac{1}{t'^2} \int W_v(\alpha_1)W'_\beta\left(\frac{\alpha - r'\alpha_2}{t'}\right), \quad (16)$$

其中  $W_v(\alpha_1)$  为  $C_v(\sqrt{1-\eta}\zeta)$  对应的 Wigner 函数表达式

$$W_v(\alpha_1) = \frac{2}{\pi} \exp[-2\text{Im}(\alpha_1)^2 - 2\text{Re}(\alpha_1)^2],$$

$W'_\beta\left(\frac{\alpha - r'\alpha_2}{t'}\right)$  为  $C_\beta(\sqrt{\eta}\alpha_2)$  对应的 Wigner 函数表达式. 将特征函数  $C_\gamma(\zeta)$  代入保真度公式

$$F = \frac{1}{\pi} \int d^2\zeta C_\gamma(\zeta) C_{|\text{cat}-\rangle}(\zeta)$$

可计算求得保真度.

图 6 (a) 和图 6 (b) 分别是  $W(0)$  值和保真度随平衡零拍探测效率  $\eta$  的变化曲线, 黑实线、红点线和蓝点划线对应的压缩纯度分别为 1.0, 0.9, 0.7. 计算中输入真空压缩的压缩度取为  $-3$  dB, BS1 透过率取为 95%, 单光子探测器暗计数为  $\nu = 10^{-4}$ , 单光子探测器的量子效率取为 70%. 由图可知, 压缩纯度越低,  $W(0) < 0$  对平衡零拍量子效率的要求越高. 当压缩纯度为 1.0 和 0.9 时, 在  $\eta > 0.60$  计算范围内, 都满足  $W(0) < 0$ . 当压缩纯度为 0.7 时, 要使  $W(0) < 0$ , 必须满足  $\eta > 0.87$ . 平衡零拍探测器效率的不完美降低了制备猫态的保真度, 压缩纯度越低, 保真度对效率  $\eta$  越不敏感. 只有同时满足高压缩纯度和高探测效率, 才能实现高保真度.

最后我们计算了几种实验条件下制备猫态的保真度, 并模拟了对应的 Wigner 函数. 计算过程中, 真空压缩的压缩度取为  $-3$  dB, 对应猫态的最优化幅度为 1.06, BS1 透过率为 95%, 单光子探测器量子效率取为 70%. 当平衡零拍探测量子效率取为 92%(其中光路传输效率为 99%, 信号光与本振光的干涉对比度为 99%, 平衡零拍探测器量子效率为 95%), 暗计数为  $10^{-4}$ , 压缩纯度为 90% (对

应反压缩度为 3.92 dB) 时, 对应的 Wigner 函数如图 7 (a) 所示,  $W(0) = -0.147$ , 保真度为 0.6. 压缩纯度是猫态制备中一个至关重要的参数, 纯度越高, 制备猫态的保真度越大. 当压缩纯度提高到 95% (对应反压缩度为 3.45 dB) 时, 重构的 Wigner 函数如图 7 (b) 所示,  $W(0) = -0.25$ , 保真度为 0.69. 理想猫态是奇光子数态, 在传输和测量中对损耗非常敏感, 另外单光子探测器暗计数会增加制备猫态中的真空成分, 降低保真度. 通过提高压缩态的纯度和平衡零拍探测系统的效率, 以及选用暗计数低的光子探测器, 可以进一步提高保真度、降低相空间原点  $W(0)$  的值. 当压缩态纯度达到 0.99 (对应反压缩度为 3.09 dB), 平衡零拍探测效率达到 0.98 时, 暗计数为  $10^{-5}$  时, 制备猫态的 Wigner 函数如图 7 (c) 所示,  $W(0) = -0.49$ , 保真度为 0.88.

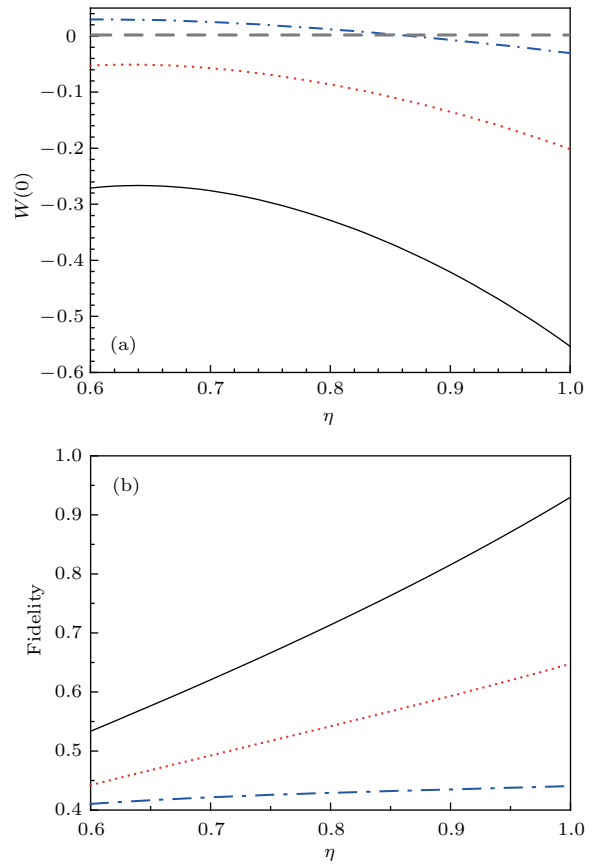


图 6  $W(0)$  值 (a) 和保真度 (b) 随平衡零拍探测总效率  $\eta$  的变化, 黑实线、红点线和蓝点划线的压缩纯度分别为 1.0, 0.9 和 0.7

Fig. 6. Dependence of the value of  $W(0)$  (a) and fidelity (b) on the total efficiency of the balanced homodyne detection  $\eta$ . The squeezing purity are 1 (black solid line), 0.9 (red dot line) and 0.7 (blue dot dash line), respectively.



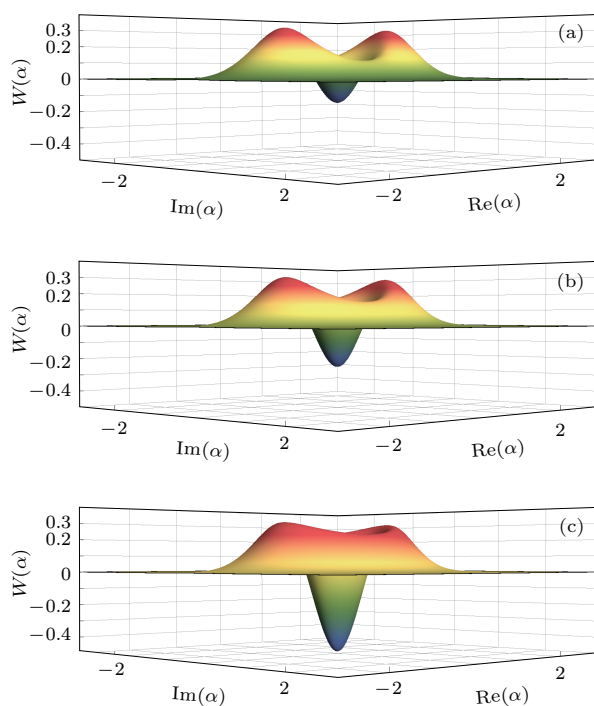


图7 几种实验条件下制备猫态的Wigner函数

Fig. 7. The Wigner function of prepared cat states under several experimental conditions.

## 5 结论

本文理论分析了实验条件不完美对薛定谔猫态制备的影响. 通过相空间特征函数建立了减光子方法制备猫态的理论模型, 分析了真空压缩态的压缩度和纯度、阈值单光子探测器的量子效率和暗计数以及平衡零拍探测损耗等诸多因素对制备猫态Wigner函数和保真度的影响. 结果表明: 压缩度越大,  $W(0) < 0$  对压缩纯度的要求越低; 在压缩纯度小于1的情况下, 存在最佳压缩度使制备态与猫态保真度最大; 低效率的阈值单光子探测器和平衡零拍探测损耗会进一步降低制备猫态的保真度. 当真空压缩的压缩度为  $-3$  dB 压缩纯度达到0.99平衡零拍探测效率达到0.98时, 利用商用阈值单光子探测器, 制备猫态保真度为0.88. 这个工作为薛定谔猫态的制备以及实验参数优化提供了理论指导.

## 参考文献

[1] Yurke B, Schleich W, Walls D F 1990 *Phys. Rev. A* **42** 1703  
 [2] Song S, Caves C M, Yurke B 1990 *Phys. Rev. A* **41** 5261  
 [3] Wu J W, Guo G C 1995 *Physics* **24** 269 (in Chinese) [吴锦伟, 郭光灿 1995 物理 **24** 269]

[4] Minganti F, Bartolo N, Lolli J, Casteels W, Ciuti C 2016 *Sci. Rep.* **6** 26987  
 [5] Johnson K G, Wong-Campos J D, Neyenhuis B, Mizrahi J, Monroe C 2017 *Nat. Commun.* **8** 697  
 [6] Ji Y H, Luo H M, Ye Z Q, Wu Y Y, Chen M Y 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 2534 (in Chinese) [嵇英华, 罗海梅, 叶志清, 吴云翼, 陈明玉 2004 物理学报 **53** 2534]  
 [7] Wang X G 1996 *Acta Phys. Sin.* **45** 389 (in Chinese) [王晓光 1996 物理学报 **45** 389]  
 [8] Dong C H 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 337 (in Chinese) [董传华 2003 物理学报 **52** 337]  
 [9] van Enk S J, Hirota O 2001 *Phys. Rev. A* **64** 022313  
 [10] Ralph T C, Gilchrist A, Milburn G J, Munro W J, Glancy S 2003 *Phys. Rev. A* **68** 042319  
 [11] Lund A P, Ralph T C, Haselgrove H L 2008 *Phys. Rev. Lett.* **100** 030503  
 [12] Monroe C, Meekhof D M, King B E, Wineland D J 1996 *Science* **272** 1131  
 [13] Hofheinz M, Wang H, Ansmann M, Bialczak R C, Lucero E, Neeley M, O'Connell A D, Sank D, Wenner J, Martinis J M, Cleland A N 2009 *Nature* **459** 546  
 [14] Ourjoumtsev A, Brouri R T, Laurat J, Grangier P 2006 *Science* **312** 83  
 [15] Takahashi H, Wakui K, Suzuki S, Takeoka M, Hayasaka K, Furusawa A, Sasaki M 2008 *Phys. Rev. Lett.* **101** 233605  
 [16] Neergaard-Nielsen J S, Nielsen B M, Hettich C, Mølmer K, Polzik E S 2006 *Phys. Rev. Lett.* **97** 083604  
 [17] Kim M S, Park E, Knight P L, Jeong H 2005 *Phys. Rev. A* **71** 043805  
 [18] Suzuki S, Tsujino K, Kannari F, Sasaki M 2006 *Opt. Commun.* **259** 758  
 [19] Wakui K, Takahashi H, Furusawa A, Sasaki M 2007 *Opt. Express* **15** 3568  
 [20] Dakna M, Anhut T, Opatrny T, Knöll L, Welsch D G 1997 *Phys. Rev. A* **55** 3184  
 [21] Wenger J, Tualle-Brouri R, Grangier P 2004 *Phys. Rev. Lett.* **92** 153601  
 [22] W Asavanant, K Nakashima, Y Shiozawa, J Yoshikawa, A Furusawa 2017 *Opt. Express* **25** 32227  
 [23] Morin O, Liu J, Huang K, Barbosa F, Fabre C, Laurat J 2014 *J. Vis. Exp.* **87** e51224  
 [24] Lü J F, Ma S J 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 080301 (in Chinese) [吕菁芬, 马善钧 2011 物理学报 **60** 080301]  
 [25] Laghaout A, Neergaard-Nielsen J S, Rigas I, Kragh C, Tipsmark A, Andersen U L 2013 *Phys. Rev. A* **87** 043826  
 [26] Laghaout A, Neergaard-Nielsen J S, Rigas I 2013 *Conference on Lasers and Electron-Optics Europe and International Quantum Electronics Conference, IEEE* **1** 1  
 [27] Li Q, Deng X W, Zhang Q, Su X L 2016 *Acta Opt. Sin.* **36** 0427001 (in Chinese) [李强, 邓晓玮, 张强, 苏晓龙 2016 光学学报 **36** 0427001]  
 [28] Kim M S, Lee J, Munro W J 2002 *Phys. Rev. A* **66** 030301  
 [29] Hyukjoon K, Hyunseok J 2015 *Phys. Rev. A* **91** 012340  
 [30] Lee C T 1995 *Phys. Rev. A* **52** 3374

# Effect of imperfect experimental condition on generation of Schrödinger cat state\*

Zhang Na-Na<sup>1)</sup> Li Shu-Jing<sup>1)2)†</sup> Yan Hong-Mei<sup>1)</sup> He Ya-Ya<sup>1)</sup> Wang Hai<sup>1)2)</sup>

1) (State Key Laboratory of Quantum Optics and Quantum Optics Devices, Institute of Opto-Electronics, Shanxi University, Taiyuan 030006, China)

2) (Collaborative Innovation Center of Extreme Optics, Taiyuan 030006, China)

( Received 2 March 2018; revised manuscript received 27 September 2018 )

## Abstract

Schrödinger cat state is an important non-classical state, and it can be used in quantum teleportation, quantum computation and quantum repeater. Schrödinger cat state is usually obtained experimentally by subtracting one photon from a squeezed-vacuum state. The fidelity between a photon-subtracted squeezed state and a cat state can be very high under suitable parameters. However, the quality of the generated state will be affected by the imperfect experimental conditions. In this paper, the effect of imperfect experimental conditions on the generation of cat state is theoretically calculated and analyzed.

The input squeezed-vacuum field is represented by Weyl characteristic function, which contains the fluctuation variance of the squeezed and amplified noises. The characteristic function of generated state is obtained by using the transmission matrix of beam splitter and the measurement operator of single-photon detector. We acquire the expression of Wigner function of generated state by the Fourier transform of the Weyl characteristic function. The fidelity is calculated by using the formula  $F = \frac{1}{\pi} \int d^2\zeta C_1(\zeta) C_{|\text{cat}\rangle}(\zeta)$ , where  $C_1(\zeta)$  and  $C_{|\text{cat}\rangle}(\zeta)$  represent Weyl characteristic function of the generated state and the Schrodinger cat state, respectively. The imperfection of the input squeezed state, the imperfection of the single-photon detector and the loss of the balanced homodyne detection are included in our theoretical model. We calculate the Wigner function at the phase-space origin  $W(0)$  and the fidelity in terms of different experimental parameters.

The results show that the fidelity and negativity of  $W(0)$  decrease with squeezing purity decreasing. A pure squeezed-vacuum state is composed of even photon number states. In the case of impure squeezing, some odd photon number states appear in the photon number distribution. After subtracting one photon from the impure squeezing state, the generated state consists of not only odd photon number state but also even photon states, which degrades the fidelity of the generated state. The lower squeezing purity is required to meet the demand for  $W(0) < 0$  under the condition of higher squeezing degree. There is an optimal squeezing degree to maximize the fidelity of generated state with impure squeezing. The use of inefficient on-off single-photon detector and the loss of the balanced homodyne detection will further reduce the fidelity of the generated state. Under the practical experimental condition: squeezing degree  $s = -3$  dB, the squeezing purity  $\mu = 99\%$  and the quantum efficiency of balanced homodyne detection  $\eta = 98\%$ , the fidelity of generated state can reach 0.88 with using a commercially available on-off single-photon detector. This work can provide theoretical guidance for generating a high-quality Schrödinger cat state.

**Keywords:** Schrödinger cat state, photon subtraction scheme, Wigner function, fidelity

**PACS:** 42.50.-p, 42.50.Dv, 03.65.Wj

**DOI:** 10.7498/aps.67.20180381

\* Project supported by the Key Research and Development Program of China (Grant No. 2016YFA0301402), the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 11475109, 11834010, 11604191), and the Fund for Shanxi "1331 Project" Key Subjects Construction, China.

† Corresponding author. E-mail: [lishujing@sxu.edu.cn](mailto:lishujing@sxu.edu.cn)