



山西大學  
Shanxi University

2012 届 博 士 学 位 论 文

四波混频产生明亮纠缠光和腔与原子强  
相互作用的相关研究

作者姓名	于 旭 东
指导教师	张 靖 教 授
学科专业	光 学
研究方向	量子光学
培养单位	量子光学与光量子器件 国家重点实验室 光电研究所
学习年限	2009 年 9 月至 2012 年 6 月

山西大学  
2012 届博士学位论文

# 四波混频产生明亮纠缠光和腔与原子强相 互作用的相关研究

作者姓名 于旭东  
指导教师 张 靖 教 授  
学科专业 光 学  
研究方向 量子光学  
培养单位 量子光学与光量子器件  
国家重点实验室  
光电研究所  
学习年限 2009 年 9 月至 2012 年 6 月

**Thesis for Doctor's degree, Shanxi University, 2012**

Generation of the bright entangled state of the light and the  
study of the cavity-atom system under strong coupling  
condition

Student Name	Xu-dong Yu
Supervisor	Prof. Jing Zhang
Major	Optics
Specialty	Quantum Optics
Department	State Key Laboratory of Quantum Optics and Optics Devices Institute of Opto-Electronics
Research Duration	2009.09-2012.06

# 目 录

中 文 摘 要.....	I
ABSTRACT.....	III
第一章 四波混频产生明亮纠缠光.....	1
1.1 引言.....	1
1.2 四波混频过程.....	3
1.2.1 四波混频过程的双边 Feynman 图解.....	3
1.2.2 四波混频过程的相位匹配.....	9
1.2.3 四波混频过程的色散补偿.....	10
1.2.4 四波混频增益过程.....	10
1.2.5 四波混频过程增益的实验观察.....	13
1.3 四波混频过程产生强关联光束.....	16
1.3.1 双模压缩态光场的相关理论.....	16
1.3.2 强度差压缩光的探测.....	17
1.3.3 FWM 过程中的损耗分析.....	21
1.3.4 FWM 产生明亮纠缠光束的相关实验.....	24
1.4 本章小结.....	32
第一章 参 考 文 献.....	33
第二章 内腔非线性过程-多共振腔.....	36
2.1 引言.....	36
2.2 相关非线性过程的理论计算.....	36
2.3 内腔四波混频的基本理论.....	41
2.4 内腔 FWM 过程.....	43
2.4.1 内腔受激 Raman 过程—双模共振腔.....	43
2.4.2 内腔 anti-Stokes 光的产生—三模共振腔.....	49
2.5 内腔四波混频过程的相关实验.....	55
2.6 小结.....	61
第二章 参 考 文 献.....	62
第三章 EIT 介质-腔系统的多正交模劈裂.....	64
3.1 引言.....	64
3.2 理论分析.....	67
3.2.1 二能级原子-腔系统的透射谱.....	70
3.2.2 三能级原子-腔系统的透射谱.....	72
3.2.3 三能级原子-腔系统的线宽特征.....	74
3.3 小结.....	77
第三章 参考文献.....	78
第四章 基于腔的原子数测量.....	80
4.1 引言.....	80

4. 2 腔内探测几个原子的基本理论.....	81
4. 3 实验系统.....	83
4. 4 谐振腔和激光器的锁定.....	86
4. 5 腔内几个原子的测量.....	89
4. 5. 1 探测效率.....	89
4. 5. 2 单原子和两个原子的探测.....	89
4. 6 小结.....	93
第四章 参考文献.....	94
第五章 总结.....	97
参与完成的工作.....	98
致 谢.....	99
个人简历及联系方式.....	100
承 诺 书.....	101
学位论文使用授权声明.....	102

## Contents

Chinese Abstract .....	I
ABSTRACT .....	III
Chapter One Generation of the entangled state of the light .....	1
1.1 Introduction .....	1
1.2 Four wave mixing process .....	3
1. 2. 1 The double-sided Feymann diagram .....	3
1. 2. 2 The phase match in the FWM .....	9
1. 2. 3 The dispersion compensation .....	10
1. 2. 4 The gain process in FWM .....	10
1. 2. 5 The measurement of the gain .....	13
1. 3 Generation of the strong coorelated beams .....	16
1. 3. 1 The theory of the two mode squeezing .....	16
1. 3. 2 The measurement of the intensity difference .....	17
1. 3. 3 The analysis of the losses in FWM .....	21
1. 3. 4 Generation of the bright entangled beams in the experiment .....	24
1. 4 Summary .....	32
Chapter one bibliography .....	33
Chapter Two Intracavity nonlinearity---multi-resonant cavity .....	36
2. 1 Introduction .....	36
2. 2 The theoretical calculation of the nonlinear process .....	36
2. 3 The theory of the intracavity FWM .....	41
2. 4 The intracavity FWM .....	43
2. 4. 1 The intracavity stimulated Raman process .....	43
2. 4. 2 The generation of the anti-Stokes in the cavity .....	49
2. 5 The FWM experiment .....	55
2. 6 Summary .....	61
Chapter two bibliography .....	62
Chapter Three Multi-normal-mode splitting of the EIT medium-cavity system .....	64
3. 1 Introduction .....	64
3. 2 The theoretical analysis .....	67
3. 2. 1 The transmission of the two level atom and cavity system .....	70
3. 2. 2 The transmission of the three level atom and cavity system .....	72
3. 2. 3 The characteristic of the linewidth of the central peaks .....	74
3. 3 Summary .....	77
Chapter three bibliography .....	78
Chapter Four The cavity-based single atom detection .....	80
4. 1 Introduction .....	80
4. 2 The theory of the cavity-based single atom detection .....	81

4. 3 Experimental setup.....	83
4. 4 The lock of the laser and the cavity.....	86
4. 5 The measurement of the atoms in the cavity .....	89
4. 5. 1 Detection efficiency .....	89
4. 5. 2 The measurement of the single atom and several atoms .....	89
4. 6 Summary .....	93
Chapter four bibliography .....	94
Chapter Five Summary .....	97
Research achievements .....	98
Acknowledgment .....	99
CV .....	100
Letter of commitment.....	101
Authorizatioin statement.....	102





---

## 中 文 摘 要

本文介绍我在攻读博士期间的相关研究工作，主要包括四部分：a. 利用四波混频产生明亮纠缠光场方面的研究；b. 内腔四波混频过程；c. 超强耦合条件下，三能级 EIT 介质与腔的耦合系统的多正交模劈裂；d. 在 MIT 联合培养期间，学习和参与的部分工作。具体如下：

a. 光场压缩态和光场纠缠态是量子信息过程的重要资源。自第一个压缩态光场在四波混频过程中实现以来，四波混频过程一直受到人们的关注，特别是最近在原子气室内利用非简并四波混频过程产生强关联的明亮孪生光束的实验，使其成为量子光学研究领域的热点。在本文中第一章将介绍我们利用铷原子蒸气中的非简并四波混频研究量子强关联光场方面的工作，主要包括两部分：一、利用两套自零拍探测系统测量强度差压缩，该探测系统可以非常方便的同时测量到散粒噪声基准、强度差压缩和反压缩噪声谱，克服了以往实验中的困难；二、研究了额外噪声对四波混频产生压缩光的影响，通过理论分析找到了消除额外噪声和最大化压缩的方法，并通过实验进行了证明。

b. 对于热原子或泵浦光远失谐时，四波混频过程一般需要泵浦光功率较高。而在弱光条件下，可以利用相干增强提高四波混频转化效率，另一个办法是通过谐振腔增强提高转化效率。在第二章中介绍我们利用腔增强作用，并借助于双光子跃迁产生的大的色散，实现腔内多共振的相关理论和实验。OPO 效率为 20%，阈值为 35mW。

c. 强耦合是实现基于腔的量子非破坏性测量、单原子激光、光子数态滤波器等重要条件，是腔量子电动力学关心的重要问题。第三章中我们将讨论利用大粒子数密度达到超强耦合时，三能级 EIT 介质与腔系

---

统的透射谱。理论分析发现在超强耦合条件下，不仅共振腔模会发生多正交模劈裂，形成多峰结构，而且临近腔模也会发生多正交模劈裂形成多峰结构，并且分析了位于 EIT 窗口内的透射峰线宽变窄的机制。

d. 在第四章中，主要介绍我在 MIT 超冷原子中心 Vladan 小组学习和参与的部分工作，主要包括基于腔的单原子和多个原子的测量的相关理论和实验研究。Vladan 小组实验中用到的是一个精细度为  $6 \times 10^4$  长为 13.7mm 的腔，由于实验装置的独特设计，捕获原子的 MOT 可以直接重合到腔内，自由空间捕获原子的技术和基于腔捕获、装载原子的技术都可以直接应用到该实验中，给实验带来了很大方便，同时也使该系统具有更大的应用前景。在单原子探测实验中，选择直接利用非常弱的泵浦光激发腔内装载的原子产生单个或几个待测的原子，通过优化方案，将背景原子移出腔外，减小背景原子与待测原子间的碰撞及其他方面所带来的不良影响，到目前为止，已经能在实验中成功的分辨出腔内的两个原子。

**关键词：**四波混频；压缩态光场；腔增强非线性过程；多正交模劈裂；单原子探测

---

## ABSTRACT

The dissertation presents the researches in quantum optics in my Ph. D. study. The content includes four components. a. the related investigations of the generation of the entangled state of the light in FWM. b. the intracavity FWM process. c. the multi-normal mode splitting of the EIT-cavity system under the superstrong coupling condition. d. the study and work when I visit Vladan group at MIT.

- a. The squeezed and entangled states of the light are the important resource of the quantum information process. The FWM has been attracted many attentions since the realization of the first squeezed state of the light in FWM. Specially, the recent researches in the non-degenerate FWM in the atomic vapor make it a hot study area in quantum optics. We will present our works on the entangled state of the light in the non-degenerate FWM in the rubidium vapor in the chapter one. In our experiment, the new detection system is composed of two pairs of self-balanced detection system, it is convenient for us to measure the SNL, squeezed intensity difference and intensity sum noise spectra simultaneously. And we also study the influence of the extra noise of the input signal field. We find the ways which can cancel the extra noise or maximize the squeezing.
- b. The high power is need in the hot atom medium or under the large detuning condition. The coherence can enhance the conversion efficiency of the FWM in the low power regime. We can also resort to the cavity. In chapter two, we demonstrate the triply-resonant optical parametric oscillator theoretically. By means of the large dispersion due to the two-photon transitions

---

and the enhancement of the cavity, the above-threshold oscillations of the Stokes and anti-Stokes fields together with the single pumping beam are realized in the experiment. The OPO efficiency is 20%, and the threshold is 35mW.

- c. The quantum non-demolition measurement, the single atom laser, the photon Fock state filter, etc. can just be realized under the strong coupling condition that is the key problem in cavity QED. We discuss the multi-normal-mode splitting in the EIT medium and cavity system under the super-strong coupling condition when the large number of atoms are in the cavity. The resonant cavity mode splits into three parts and the other modes near the resonant mode can also split into three parts. In addition, the linewidth of the central peaks are narrowed because of the large slope of the dispersion in the EIT window.
- d. In chapter four, I present the study and the work about the cavity-based single atom detection at Vladan group during my visiting. Vladan group design a cavity of 13.7mm, the finesse is  $6 \times 10^4$ . Because of the novel design, the atoms can be loaded into the cavity directly. The technique of trapping the atoms in the free space and in the micro-cavity can be applied to the experiment. So it opens the potential application in quantum optics. The very weak pump laser is used to excite a single atom or several atoms into the measured state. And by removing the background atoms, the system can distinguish two atoms in the cavity.

**Key words:** four wave mixing; squeezed state of the light; cavity enhanced nonlinearity; single atom detection

# 第一章 四波混频产生明亮纠缠光

## 1.1 引言

光场压缩态和光场纠缠态是量子信息过程的重要资源，尤其在连续变量量子通信中，更为重要。在本章中，我们将介绍利用四波混频过程产生明亮纠缠光束，主要讨论量子强关联的孪生光束之间的相对强度差压缩的测量，及额外噪声对压缩的影响。这些基础性工作为以后的相关非线性过程和量子信息过程的研究做准备。

光场压缩态(squeezed state of light)<sup>[1.1,1.2]</sup>，或称双光子相干态（two-photon coherent state）<sup>[1.3]</sup>，是一种量子噪声被压缩的非经典光。经典的 Maxwell 电磁理论中，理想的相干光是没有任何噪声的，但是量子力学认为理想相干光同样存在噪声——散粒噪声极限（shot-noise-limit），这种噪声是光的粒子性的表现，由光的发射过程本身决定<sup>[1.4]</sup>。

量子化光场的正交振幅和正交相位分量可以用场的产生和湮灭算符表示：

$$\hat{X} = \frac{1}{2}(\hat{a} + \hat{a}^\dagger) \quad (1.1)$$

$$\hat{Y} = \frac{1}{2i}(\hat{a} - \hat{a}^\dagger) \quad (1.2)$$

其中  $\hat{X}$  和  $\hat{Y}$  是两个共轭量， $[\hat{X}, \hat{Y}] = \frac{i}{2}$ ，根据 Heisenberg 不确定关系：

$$\delta\hat{X} \cdot \delta\hat{Y} \geq \frac{1}{4} \quad (1.3)$$

若量子涨落满足： $\delta^2\hat{X} = \delta^2\hat{Y} = \frac{1}{4}$ ，即为相干态光场，这种量子起伏即为量子散粒噪声极限（shot-noise-limit）。在测量时将其作为量子噪声基准，即为标准散粒噪声极限。如果光场的某一分量的量子起伏小于相干光对应的起伏，即为光场压缩态。

目前实验上实现了三种类型的光场压缩态：一、正交振幅分量的涨落  $\delta^2\hat{X} < \frac{1}{4}$ （或正交相位分量  $\delta^2\hat{Y} < \frac{1}{4}$ ），即为正交振幅（或正交相位）光场压缩态，是由 Stoler 和 Yuen 等在研究最小不确定波包的正交分量涨落（或位置和动量算符的涨落）时提出<sup>[1.3,1.5]</sup>，实验上，首个压缩态光场是由 Bell 实验室的 Slusher 小组在 1985 年利用腔内

钠原子介质的非简并四波混频过程实现，测量到了 0.7dB 的正交振幅压缩<sup>[1.6]</sup>，1986 年加州理工的 Kimble 小组采用阈值以下参量下转换获得 63% 的正交振幅光场压缩态<sup>[1.7]</sup>；二、光子数压缩态（或振幅压缩态），是指光子数的涨落小于平均光子数， $\delta^2 N_{\text{photon}} < \langle N_{\text{photon}} \rangle$ ，日本的 Yamamoto 小组在 1987 年利用高阻抗恒流抑制泵浦涨落，将噪声降低到 7.3%<sup>[1.8]</sup>，1994 年山西大学光电所与法国 Grangier 小组合作利用光栅反馈将激光器强度噪声压缩 2.3dB<sup>[1.9]</sup>；三、强度差压缩态，即  $\delta^2(I_1 - I_2) < \langle I_1 \rangle + \langle I_2 \rangle$ ，1987 年 Reynaud 从理论上证明了参量过程产生的孪生光子对的强度差噪声小于散粒噪声基准<sup>[1.10]</sup>，实验上，法国的 Fabre 小组于 1991 年利用 Nd:YAG 泵浦参量振荡器，得到 86% 的强度差压缩<sup>[1.11]</sup>，1998 年山西大学光电所利用  $\alpha$  切割 KTP 晶体和 Nd:YAG 系统获得 9.2dB 的强度差压缩<sup>[1.12]</sup>，2011 年华东师范大学的张卫平小组利用双  $\Lambda$  型三能级原子介质的非简并四波混频，实现了低频和带宽的可控压缩，最大强度差压缩 5dB（1MHz 处）<sup>[1.13]</sup>。

自实验上首次实现光场压缩态以来，人们采用了各种方法，其中利用光学参量振荡器(optical parametric oscillator, OPO)产生压缩态光场已是非常成熟的技术，目前利用该技术已经获得了 11dB 的双模真空压缩态光场<sup>[1.14]</sup>。但是光学参量下转换一般需要较高能量，所以需要外腔耦合而形成光学参量振荡器以增强非线性过程，提高转化效率。一方面光学振荡器需要锁定，以提高转化效率，因此系统对外界干扰很敏感，影响稳定性；另一方面需要模式匹配，因此一般只有单一 TEM 模能产生噪声压缩。随着连续变量量子成像技术的发展<sup>[1.15]</sup>，涉及图像的传输、放大和处理量子相关的空间信息过程<sup>[1.16]</sup>，提高了对空间多模的操控能力的要求。

2007 年美国国家标准技术研究所的 P. D. Lett 小组，利用铷原子蒸气介质内的向前非简并四波混频，观察到了 probe 光和 conjugate 光之间 3.5dB 的相对强度差压缩<sup>[1.17]</sup>。2008 年将这一压缩度提高到了 8dB<sup>[1.18]</sup>，同年该小组测量了四波混频过程中产生的孪生真空场的空间关联特性<sup>[1.19]</sup>。利用四波混频产生压缩态光场，实验装置简单，容易操作，而且不用锁腔，因此也提高了系统的稳定性。另一方面四波混频过程的相位匹配条件允许 probe 光和 conjugate 光波矢量可以在一定范围内变化，所以为空间多模操控提供了一个崭新的方法。

本章的主要内容包括：1、四波混频的增益过程（第 1.2 节），2、强度差压缩的探测和额外噪声的消除及压缩最大化的相关理论和实验（第 1.3 节）。

## 1.2 四波混频过程

四波混频 (FWM) 是指三个光波相互作用产生第四个光场的过程, 它是一种三阶非线性效应 ( $\chi^{(3)}$ )。物理上, 如果一束光与介质作用, 产生极化振动, 使电子原子最外层电子发生跃迁, 由于真空扰动或碰撞等其他因素的影响, 电子会重新回到基态, 辐射出频率相同而相位不同的光子, 这就是 Rayleigh 散射 (如果末态不同, 辐射出的光子频率有差别, 即为 Raman 散射), 在原来光的传播方向上反射出的相位与入射光反相, 而发生相消干涉, 所以探测出射光光强, 透射谱会出现凹陷, 表现为介质产生吸收; 如果第二束光作用到介质上, 两束光的共同作用, 则形成和频和差频; 当有第三束光参与时, 同样会诱导极化振动, 而与其他光场形成拍频, 而和频和差频的结果即产生第四个光场。

一般四波混频过程需要一束或者两束较强的泵浦光 (pump) 和一个较弱的探针光 (probe), pump 场的强度认为不发生变化。混频产生的第四束光, 即共轭光 (conjugate), 与 probe 光的空间相位共轭, 为 probe 光的时间反演。Probe 光和 conjugate 光在四波混频过程中同时获得增益, 增加的这两个光子为孪生的光子对, 它们之间存在强关联, 这样虽然 probe 光和 conjugate 光的总光强增加, 但并不会增加它们之间的相对强度噪声, 这即为相对强度差压缩。

### 1.2.1 四波混频过程的双边 Feynman 图解

双边 Feynman 图解法对于研究非线性过程来说是一个非常简洁有效的手段<sup>[1.20,1.21]</sup>, 而且物理图像非常清晰。在本小节中我们利用双边 Feynman 图解法来分析相干 anti-Stokes Raman 过程。Feynman 图解法是由 Feynman 为解释亚原子粒子的复杂行为, 于 1948 年提出。Lounis 和 Cohen-Tannoudji 首先用其解释了 EIT 效应<sup>[1.22]</sup>。Feynman 图解法源于时间微扰理论, 对于相互作用表象下薛定谔方程表示为:

$$i\hbar \frac{d}{dt} \psi_I(t) = \hat{H}_I(t) \psi_I(t) \quad (1.4)$$

其中  $\psi_I(t)$  和  $\hat{H}_I(t)$  分别是相互作用表象下的态矢量和相互作用 Hamiltonian。如果定义演化过程中的相互作用传播子为  $\hat{U}(t, t_0)$ , 可得态矢量的演化方程为:

$$\psi_I(t) = \hat{U}(t, t_0) \psi_I(t_0) \quad (1.5)$$

将上式代入 1.4 式可得：

$$i\hbar \frac{d}{dt} \hat{U}(t, t_0) = \hat{H}_I(t) \hat{U}(t, t_0) \quad (1.6)$$

由微扰理论可以得上式的解为：

$$\begin{aligned} \hat{U}(t, t_0) &= I - \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t \hat{H}_I(t') \hat{U}(t', t_0) dt' \\ &\approx I - \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t \hat{H}_I(t') [I - \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^{t'} \hat{H}_I(t'') \hat{U}(t'', t_0) dt''] dt' \\ &\approx I - \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t \hat{H}_I(t') dt' - \frac{1}{\hbar^2} \int_{t_0}^t \hat{H}_I(t'') \hat{U}(t'', t_0) dt'' + \end{aligned} \quad (1.7)$$

对于从  $|a\rangle$  到  $|b\rangle$  的跃迁则有：

$$\begin{aligned} \langle b | \hat{U}(t, t_0) | a \rangle &= \delta(\langle b |, | a \rangle) \exp[-i\omega_a(t-t_0)] \\ &\quad - \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t \exp[-i\omega_b(t-t')] \langle b | \hat{H}_I | a \rangle \exp[-i\omega_b(t'-t_0)] dt' \\ &\quad - \frac{1}{\hbar^2} \int_{t_0}^t \left\{ \int_{t_0}^{t'} \sum_i \exp[-i\omega_b(t-t')] \langle b | \hat{H}_I | i \rangle \exp[-i\omega_b(t'-t_0)] \right. \\ &\quad \left. \times \exp[-i\omega_i(t'-t'')] \langle i | \hat{H}_I | a \rangle \exp[-i\omega_i(t''-t_0)] dt'' \right\} dt' + \end{aligned} \quad (1.8)$$

上式等号右面第一项为零阶项，表示一个自由粒子，因为在从时间  $t_0$  到任意时刻  $t$  的演化过程中初态和终态相同。第二项为一阶项，表示  $t_0$  到  $t'$  这段时间内，粒子由于相互作用由初态  $|a\rangle$  跃迁到末态  $|b\rangle$ ，而在其后的时间  $t'$  到  $t$  自由演化。对于第三项二阶项表示粒子由  $|a\rangle$  态跃迁到任意中间态  $|i\rangle$ ，而到  $t'$  时开始自由演化。其他以后各项与上类似。但是由于中间态不止一个，因此第三项以后各项中对所有可能的中间态求和。

在双边 Feynman 图中，每一个图代表一个从初态到终态的可能的跃迁路径，其跃迁可以表示为：

$$\langle j | \hat{U}(t, t_0) | i \rangle = -E \mu_{ji} = \frac{\hbar}{2} \Omega_{ji} \exp[-i(\omega t - i\gamma_{ji})] \quad (1.9)$$

其中  $E$  和  $\omega$  为作用光场的电场强度和频率， $\mu_{ji}$  为从  $|i\rangle$  到  $|j\rangle$  的跃迁矩阵元， $\Omega_{ji}$  为 Rabi 频率。

首先考虑 EIT 过程，对于一个  $\Lambda$  型三能级系统， $|a\rangle$  和  $|b\rangle$  分别是两个基态， $|e\rangle$  为激发态。probe 光作用在  $|a\rangle$ - $|e\rangle$  的跃迁线上，control 光与  $|b\rangle$ - $|e\rangle$  跃迁线耦合， $\mu_{ea}$  和  $\mu_{eb}$



为对应偶极矩阵元， $\Omega_p$  ( $\Omega_c$ ) 和  $\omega_p$  ( $\omega_c$ ) 是 probe 光 (control 光) 的 Rabi 频率和频率，probe 光相对于  $|a\rangle$ - $|e\rangle$  跃迁的失谐为  $\Delta_p$ ，pump 光相对于  $|b\rangle$ - $|e\rangle$  跃迁的失谐为  $\Delta_c$ 。如图 1.1 所示，图 a 为能级结构图，图 b 为 EIT 过程的双边 Feynman 图解方框图，图 c 和 d 为与 b 图对应的所有可能的跃迁路径和双边 Feynman 图解， $aa^{(0)}$ 、 $ae$  和  $ab$  分别是对应的密度矩阵元  $\rho_{aa}$ 、 $\rho_{ae}$  和  $\rho_{ab}$ 。因为 probe 光很弱，在图中只对应一次跃迁。由于 control 光很强，所以认为可以无限激发原子的跃迁。

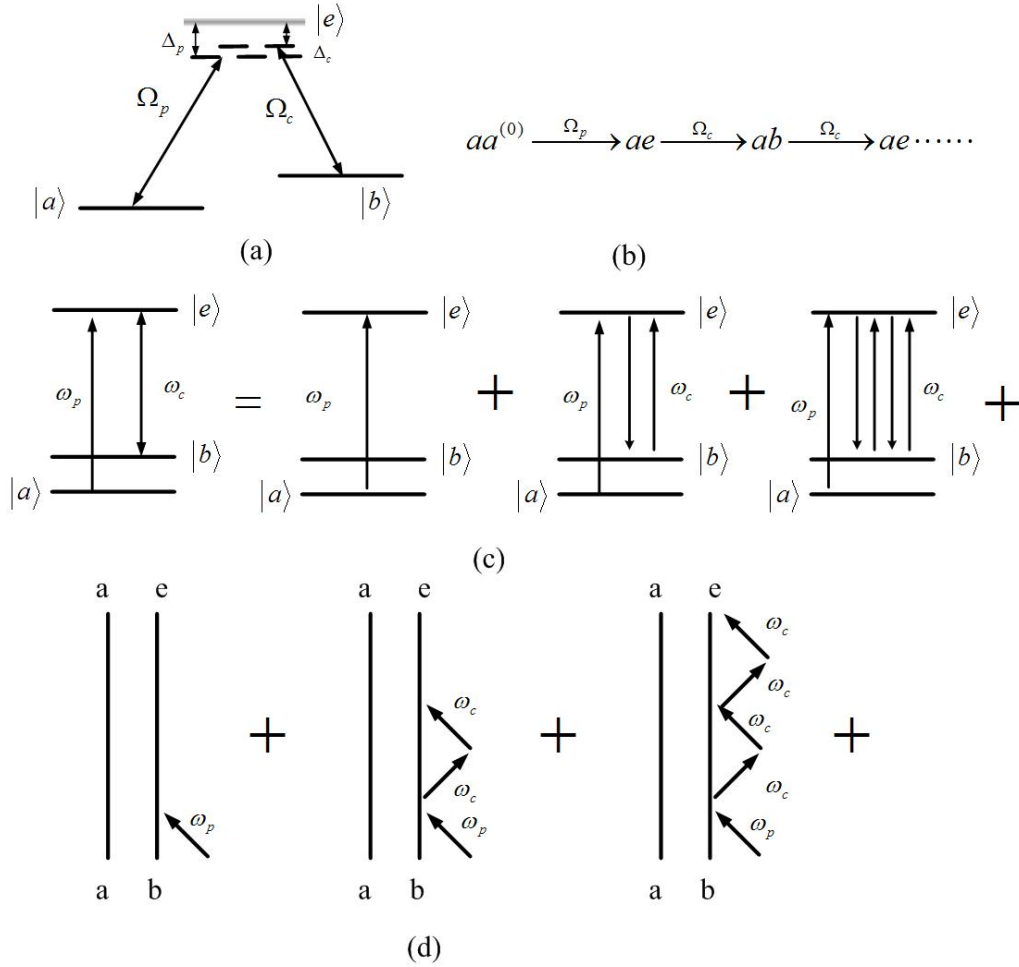


图 1.1  $\Lambda$  型三能级结构图及双边 Feynman 图解

图 1.1 中图 d 的第一个图对应由  $|e\rangle$ - $|a\rangle$  的跃迁，由二能级的跃迁，很容易得到：

$$r_0 = \frac{-i\Omega_p \rho_{aa}^{(0)}}{2} \frac{1}{i\Delta_p + \gamma_{ea}} \quad (1.10)$$

第二个对应  $|e\rangle$ - $|b\rangle$ - $|e\rangle$ - $|a\rangle$  的跃迁为：

$$r_1 = r_0 \frac{-i\Omega_c}{2} \frac{1}{i(\Delta_p - \Delta_c) + \gamma_{ba}} \frac{-i\Omega_c}{2} \frac{1}{i\Delta_p + \gamma_{ea}} \quad (1.11)$$

上式中第二、四项  $\frac{-i\Omega_c}{2}$  为顶点的贡献，第三项源于  $|b\rangle-|a\rangle$  的传播子，第五项源于  $|a\rangle-|e\rangle$  的传播子， $\gamma_{ea}$  为自发辐射率， $\gamma_{ba}$  为无辐射跃迁速率。如果定义：

$$r = \frac{-i\Omega_c}{2} \frac{1}{i(\Delta_p - \Delta_c) + \gamma_{ba}} \frac{-i\Omega_c}{2} \frac{1}{i\Delta_p + \gamma_{ea}} \quad (1.12)$$

由 1.1 图可以看出其后的跃迁路径是以  $r$  为周期，所以可得  $|e\rangle-|a\rangle$  的密度矩阵元：

$$\begin{aligned} \rho_{ea} = & \frac{-i\Omega_p}{2} \frac{\rho_{aa}^{(0)}}{\Delta_p + i\gamma_{ea}} \left[ 1 + \frac{-i\Omega_c}{2} \frac{1}{i(\Delta_p - \Delta_c) + \gamma_{ba}} \frac{-i\Omega_c}{2} \frac{1}{i\Delta_p + \gamma_{ea}} \right. \\ & \left. + \left( \frac{-i\Omega_c}{2} \frac{1}{i(\Delta_p - \Delta_c) + \gamma_{ba}} \frac{-i\Omega_c}{2} \frac{1}{i\Delta_p + \gamma_{ea}} \right)^2 + \dots \right] \end{aligned} \quad (1.13)$$

在  $|r| \ll 1$  时，化简 1.13 式可得：

$$\rho_{ea} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{-i\Omega_p}{2} \frac{\rho_{aa}^{(0)}}{i\Delta_p + \gamma_{ea}} r^m = \rho_{aa}^{(0)} \frac{-i\Omega_p / 2}{i\Delta_p + \gamma_{ea} + \frac{|\Omega_c|^2 / 4}{i(\Delta_p - \Delta_c) + \gamma_{ba}}} \quad (1.14)$$

下面我们用双边 Feymann 图解法来分析四波混频过程。如图 1.2.a 所示，为双  $\Lambda$  型结构，pump 光相对于  $|e\rangle-|b\rangle$  的跃迁线失谐为  $\Delta_c$ ，probe 光的失谐为  $\Delta_p$ ，conjugate 光相对于  $|e\rangle-|a\rangle$  的跃迁线失谐为  $\Delta_m$ ， $\Omega_c$ 、 $\Omega_p$  和  $\Omega_m$  分别为各束光所对应的 Rabi 频率。FWM 过程可以分为线性过程 I 和非线性过程 II，电极化强度（这里为慢变量）表示为：

$$P = P^l + P^{nl} \quad (1.15)$$

对于线性过程 I，即 EIT 过程，与以上分析相同。对于 conjugate 光，其线性部分为：

$$\begin{aligned} P_m^l &= \frac{-iN_a\mu_{ea}\Omega_m/2}{i\Delta_m + \gamma_{ea}} \sum_{n=0}^{\infty} r_l^n \\ &= \frac{-iN_a\mu_{ea}\Omega_m/2}{i\Delta_m + \gamma_{ea}} \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \frac{-i\Omega_c}{2} \frac{-1}{i(\Delta_m - \Delta_c) + \gamma_{ba}} \frac{-i\Omega_c}{2} \frac{-1}{i\Delta_m + \gamma_{ea}} \right]^n \\ &= N_a\mu_{ea} \frac{-i\Omega_m/2}{i\Delta_m + \gamma_{ea} + \frac{\Omega_c^2/4}{i(\Delta_m - \Delta_c) + \gamma_{ba}}} \end{aligned} \quad (1.16)$$

非线性过程如图 1.2.II 所示，采用与 EIT 类似的方法，电极化率的非线性部分可表示为：

$$\begin{aligned}
 P_m^{nl} &= \frac{iN_a \mu_{ea} \Omega_c^2 \Omega_p}{8} \frac{1}{i(\Delta_c + \Delta_{ba}) + \gamma_{ea}} \frac{1}{i(\Delta_c + \Delta_{ba} - \Delta_p) + \gamma_{ba}} \frac{1}{i(2\Delta_c + \Delta_{ba} - \Delta_p) + \gamma_{ea}} \sum_{n=0}^{\infty} r_{nl}^n \\
 &= \frac{iN_a \mu_{ea} \Omega_c^2 \Omega_p}{8} \frac{1}{i(\Delta_c + \Delta_{ba}) + \gamma_{ea}} \frac{1}{i(\Delta_c + \Delta_{ba} - \Delta_p) + \gamma_{ba}} \frac{1}{i(2\Delta_c + \Delta_{ba} - \Delta_p) + \gamma_{ea}} \\
 &\quad \times \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \frac{-i\Omega_c / 2}{i(\Delta_c + \Delta_{ba} - \Delta_p) + \gamma_{ba}} \frac{-i\Omega_c / 2}{i(2\Delta_c + \Delta_{ba} - \Delta_p) + \gamma_{ea}} \right]^n \\
 &= \frac{iN_a \mu_{ea} \Omega_c^2 \Omega_p / 8}{[i(\Delta_c + \Delta_{ba}) + \gamma_{ea}][i(\Delta_c + \Delta_{ba} - \Delta_p) + \gamma_{ba}][i(2\Delta_c + \Delta_{ba} - \Delta_p) + \gamma_{ea}]} \\
 &\quad \times \frac{1}{1 + \frac{\Omega_c^2 / 4}{[i(\Delta_c + \Delta_{ba} - \Delta_p) + \gamma_{ba}][i(2\Delta_c + \Delta_{ba} - \Delta_p) + \gamma_{ea}]}}
 \end{aligned} \tag{1.17}$$

对于 probe 光，同理可得其电极化率的线性部分为：

$$\begin{aligned}
 P_p^l &= \frac{-iN_a \mu_{eb} \Omega_p / 2}{i\Delta_p + \gamma_{eb}} \sum_{n=0}^{\infty} (r_l')^n \\
 &= \frac{-iN_a \mu_{eb} \Omega_p / 2}{i\Delta_p + \gamma_{eb}} \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \frac{-i\Omega_c}{2} \frac{-1}{i(\Delta_p - \Delta_c) + \gamma_{ba}} \frac{-i\Omega_c}{2} \frac{-1}{i\Delta_p + \gamma_{eb}} \right]^n \\
 &= N_a \mu_{eb} \frac{-i\Omega_p / 2}{i\Delta_p + \gamma_{eb} + \frac{\Omega_c^2 / 4}{i(\Delta_p - \Delta_c) + \gamma_{ba}}}
 \end{aligned} \tag{1.18}$$

非线性部分：

$$\begin{aligned}
 P_p^{nl} &= \frac{iN_a \mu_{eb} \Omega_c^2 \Omega_m}{8} \frac{1}{i\Delta_m + \gamma_{ea}} \frac{1}{i(\Delta_c + \Delta_{ba}) + i\gamma_{ba}} \frac{1}{i(\Delta_c - \Delta_{ba} - \Delta_m) + \gamma_{ea}} \sum_{n=0}^{\infty} (r_{nl}')^n \\
 &= \frac{iN_a \mu_{eb} \Omega_c^2}{8} \frac{1}{i\Delta_m + \gamma_{ea}} \frac{1}{i(\Delta_c + \Delta_{ba}) + \gamma_{ba}} \frac{1}{i(\Delta_c - \Delta_{ba} - \Delta_m) + \gamma_{ea}} \\
 &\quad \times \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \frac{-i\Omega_c / 2}{i\Delta_m + \gamma_{ea}} \frac{-i\Omega_c / 2}{i(\Delta_c - \Delta_{ba} - \Delta_m) + \gamma_{ea}} \right]^n \\
 &= \frac{iN_a \mu_{eb} \Omega_c^2 \Omega_m / 8}{i\Delta_m + \gamma_{ba}} \frac{1}{i(\Delta_c + \Delta_{ba}) + \gamma_{ea}} \frac{1}{i(\Delta_c - \Delta_{ba} - \Delta_m) + \gamma_{ea}} \\
 &\quad \times \frac{1}{1 + \frac{|\Omega_c|^2 / 4}{[i\Delta_m + \gamma_{ba}][i(\Delta_c + \Delta_{ba}) + \gamma_{ea}]}}
 \end{aligned} \tag{1.19}$$

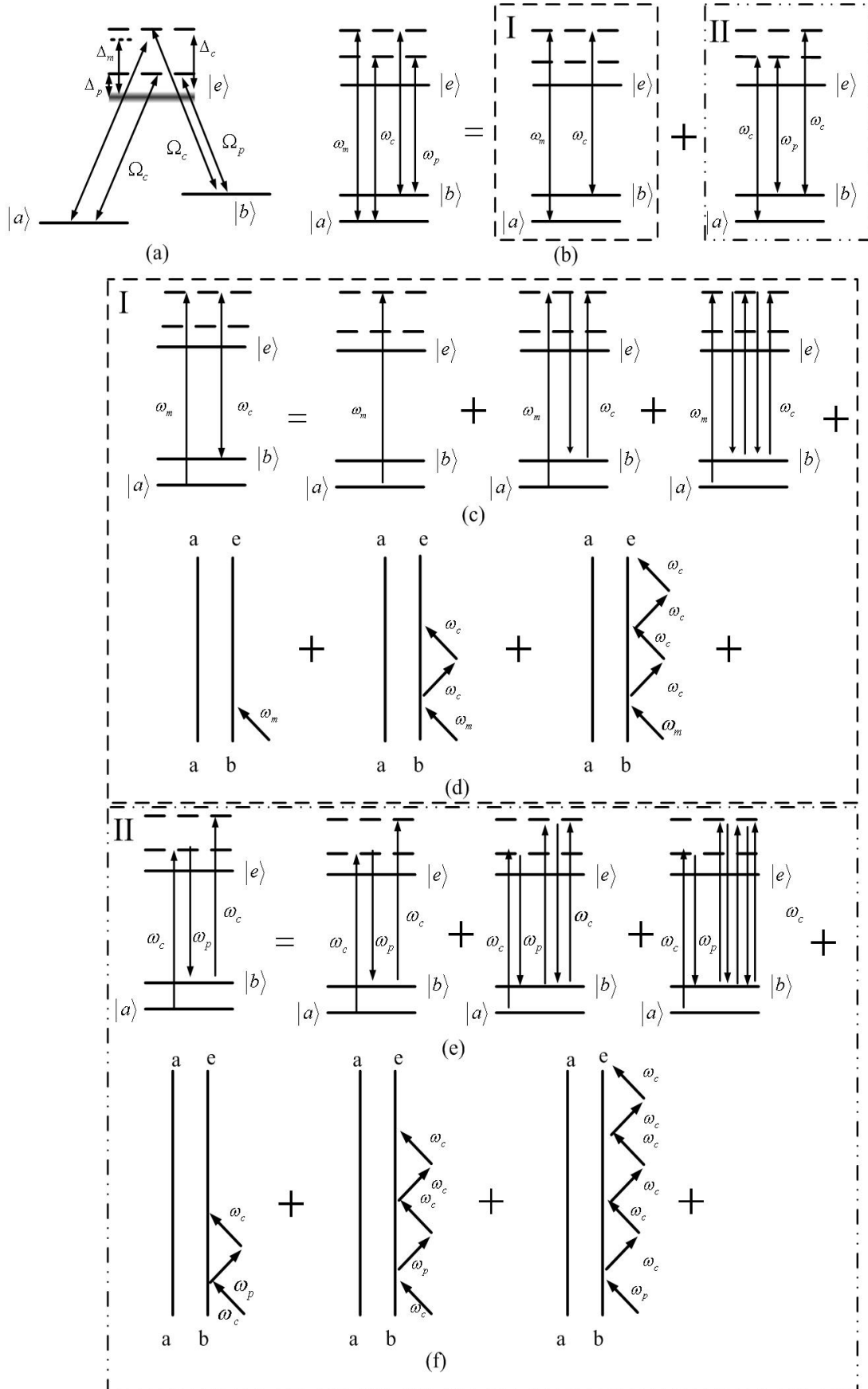


图 1.2 四波混频过程 Feynman 图解

### 1.2.2 四波混频过程的相位匹配

FWM 过程中需要满足能量守恒和动量守恒,对于同向传播的四波混频光路结构,如图 1.3 所示,能量守恒和动量守恒条件为:

$$\Delta\omega = 2\omega_{pump} - \omega_{probe} - \omega_m = 0 \quad (1.20.a)$$

$$\Delta\vec{k} = 2\vec{k}_{pump} - \vec{k}_{probe} - \vec{k}_m = 0 \quad (1.20.b)$$

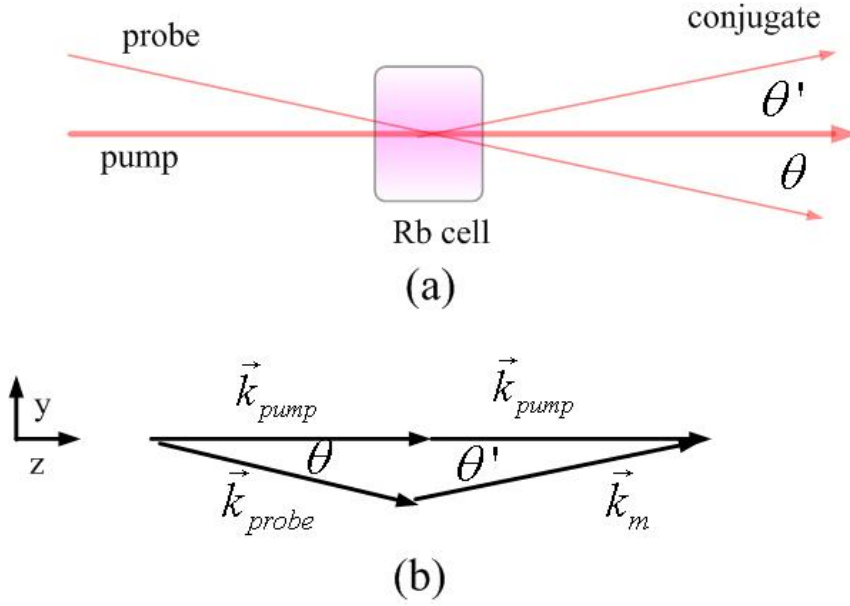


图 1.3 自由空间四波混频过程光路图和相位匹配矢量图

由 1.20.b 式可得四波混频过程产生的 conjugate 光与 pump 光的夹角满足下式:

$$\tan(\theta') = \frac{(\vec{k}_m)_y}{(\vec{k}_m)_x} = \frac{|\vec{k}_{probe}| \sin(\theta)}{2|\vec{k}_{pump}| - |\vec{k}_{probe}| \cos(\theta)} \quad (1.21)$$

一般情况下,  $\theta$  都很小, 约为几个 mrad, 因此 conjugate 光与 pump 光的夹角也非常小, 所以可得:

$$\begin{aligned} \tan(\theta') \approx \theta' &= \frac{\omega_{probe} n_{probe}}{2\omega_{pump} n_{pump} - \omega_{probe} n_{probe}} \sin(\theta) \\ &= \frac{\omega_{probe} n_{probe}}{\omega_{pump} n_{pump}} \theta \\ &\approx \theta \end{aligned} \quad (1.22)$$

上式中假设  $n \approx 1$ , 且在  $\omega_{pump} - \omega_{probe}$  (几个 GHz) 远小于 pump 光和 probe 光的频率 (几百 THz) 的情况下, 近似认为  $\omega_{pump} = \omega_{probe}$ 。

### 1. 2. 3 四波混频过程的色散补偿

由动量守恒关系 1.20.b 可得：

$$\begin{aligned} |\vec{k}_m|^2 &= (\vec{k}_m)_z^2 + (\vec{k}_m)_y^2 \\ &= 4|\vec{k}_{pump}|^2 + |\vec{k}_{probe}|^2 - 4|\vec{k}_{pump}||\vec{k}_{probe}|\cos(\theta) \end{aligned} \quad (1.23)$$

由上述关系可得：

$$\begin{aligned} \cos(\theta) &= \frac{4|\vec{k}_{pump}|^2 + |\vec{k}_{probe}|^2 - |\vec{k}_m|^2}{4|\vec{k}_{pump}||\vec{k}_{probe}|} \\ &= \frac{4n_{pump}^2\omega_{pump}^2 + n_{probe}^2\omega_{probe}^2 - n_m^2\omega_m^2}{4n_{pump}\omega_{pump}n_{probe}\omega_{probe}} \\ &= \frac{4n_{pump}^2\omega_{pump}^2 + n_{probe}^2\omega_{probe}^2 - n_m^2(2\omega_{pump} - \omega_{probe})^2}{4n_{pump}\omega_{pump}n_{probe}\omega_{probe}} \\ &= \frac{4(n_{pump}^2 - n_m^2)\omega_{pump}^2 + (n_{probe}^2 - n_m^2)\omega_{probe}^2}{4n_{pump}\omega_{pump}n_{probe}\omega_{probe}} + \frac{n_m^2}{n_{pump}n_{probe}} \\ &= \frac{4(n_{pump}^2 - n_m^2) + (n_{probe}^2 - n_m^2)}{4n_{pump}n_{probe}} + 1 \end{aligned} \quad (1.24)$$

如果假设  $\omega_{pump} \approx \omega_{probe}$ ，在  $\theta$  很小的情况下，将折射率与电极化率关系  $n^2 = 1 + \text{Re}(\chi)$  代入上式得：

$$\theta^2 = (5n_m^2 - 4n_{pump}^2 - n_{probe}^2) / 2 = (5\chi_m - 4\chi_{pump} - \chi_{probe}) / 2 \quad (1.25)$$

对于我们的实验则要求最佳相位匹配为  $\theta \approx 8\text{mrad}$ 。

### 1. 2. 4 四波混频增益过程

电磁场在介质内传播时，与介质相互作用，会获得增益或被吸收，满足 Maxwell 方程组：

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{B} \quad (1.26.a)$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial}{\partial t} \vec{D} \quad (1.26.b)$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho \quad (1.26.c)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (1.26.d)$$

其中  $\vec{E}$ 、 $\vec{H}$  为电场强度和磁场强度矢量， $\vec{D}$  和  $\vec{B}$  为电感应强度矢量和磁感应强度矢量， $\vec{j}$  和  $\rho$  为电流密度矢量和电荷密度。且有：

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \quad (1.27)$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \quad (1.28)$$

$$\vec{j} = \sigma \vec{E} \quad (1.29)$$

1.29 式中  $\sigma$  为介质的电导率，1.27 式中的  $\vec{P}$  为电极化强度，其表达式为：

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi \vec{E} + \vec{P}^{nl} \quad (1.30)$$

上式中右边第一项对应线性化部分，第二项为非线性项。如果对 1.26.a 式求旋度，则有：

$$\begin{aligned} \nabla \times \nabla \times \vec{E} &= -\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \vec{B}) = -\mu \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \vec{H}) \\ &= -\mu \sigma \frac{\partial}{\partial t} \vec{E} - \mu \epsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{E} - \mu \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{P} \end{aligned} \quad (1.31)$$

根据矢量关系：

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E} = \nabla (\nabla \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} \quad (1.32)$$

本文中我们只考虑没有净自由电荷的介质，因此  $\nabla \cdot \vec{E} = 0$ ，所以 1.31 式可变为：

$$\nabla^2 \vec{E} = \mu \sigma \frac{\partial}{\partial t} \vec{E} + \mu \epsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{E} + \mu \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{P} \quad (1.33)$$

这里我们只考虑各向同性的介质，即  $\vec{E}$ 、 $\vec{D}$  和  $\vec{P}$  矢量方向相平行，所以上式已写成了标量形式。如果介质处于自由空间中，则：

$$\nabla^2 E = \mu \epsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} E + \mu \frac{\partial^2}{\partial t^2} P \quad (1.34)$$

将 1.30 式代入上式：

$$\nabla^2 E = \mu \epsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} E + \mu \frac{\partial^2}{\partial t^2} P^{nl} \quad (1.35)$$

其中  $\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r = \epsilon_0 (1 + \chi')$ 。如果 FWM 过程中的各光场的电场强度可写为：

$$E_i(\vec{r}, t) = \frac{1}{2} A_i(\vec{r}, t) \exp[i(\omega_i t - \vec{k}_i \cdot \vec{r})] + c.c. \quad (1.36)$$

其中  $A_i$  为各场的振幅， $\omega_i$  为各场的频率。利用 1.17 和 1.19 式，可得：

$$P^{nl}(\omega_m = 2\omega_c - \omega_p) = \chi_m^{nl} A_c A_c A_p^* \exp i[\omega_m t - (2\bar{k}_c - \bar{k}_p) \cdot \bar{r}] + c.c. \quad (1.37.a)$$

$$P^{nl}(\omega_p = 2\omega_c - \omega_m) = \chi_p^{nl} A_c A_c A_m^* \exp i[\omega_p t - (2\bar{k}_c - \bar{k}_m) \cdot \bar{r}] + c.c. \quad (1.37.b)$$

其中：

$$\begin{aligned} \chi_m^{nl} = & \frac{iN_a \mu_{ea} \mu_{eb} / (\hbar \varepsilon_0)}{[i(\Delta_c + \Delta_{ba}) + \gamma_{ea}][i(\Delta_c + \Delta_{ba} - \Delta_p) + \gamma_{ba}][i(2\Delta_c + \Delta_{ba} - \Delta_p) + \gamma_{ea}]} \\ & \times \frac{1}{1 + \frac{\Omega_c^2 / 4}{[i(\Delta_c + \Delta_{ba} - \Delta_p) + \gamma_{ba}][i(2\Delta_c + \Delta_{ba} - \Delta_p) + \gamma_{ea}]}} \end{aligned} \quad (1.38.a)$$

$$\begin{aligned} \chi_p^{nl} = & \frac{iN_a \mu_{eb} \mu_{ea} / (\hbar \varepsilon_0)}{i\Delta_m + \gamma_{ba}} \frac{1}{i(\Delta_c + \Delta_{ba}) + \gamma_{ea}} \frac{1}{i(\Delta_c - \Delta_{ba} - \Delta_m) + \gamma_{ea}} \\ & \times \frac{1}{1 + \frac{|\Omega_c|^2 / 4}{[i\Delta_m + \gamma_{ba}][i(\Delta_c - \Delta_{ba} - \Delta_m) + \gamma_{ea}]}} \end{aligned} \quad (1.38.b)$$

假设 pump 光沿 z 轴方向传播，probe 光和 conjugate 光与 pump 光夹角很小，都为  $\theta$ ，

将 1.36 和 1.37 式代入 1.35 式，并且在  $\left| \frac{d^2 A_i}{dz^2} \right| \ll \left| k_i \frac{dA_i}{dz} \right|$  的条件下，可得各光场的稳态

方程为：

$$\frac{dA_p}{dz} = -i\kappa_p^* A_m^* \quad (1.39.a)$$

$$\frac{dA_m^*}{dz} = i\kappa_m A_p \quad (1.39.b)$$

其中  $\kappa_p^* = \frac{\mu\omega_p^2}{2k_p} \chi_p^{nl} A_c A_c \cos\theta$ ， $\kappa_m = \frac{\mu\omega_m^2}{2k_m} \chi_m^{nl} A_c A_c \cos\theta$ ， $\mu$  为介质的磁导率。设介质的

长度为  $L$ ，求解上式可得：

$$A_p(z) = \cosh(|\kappa|z) A_p(0) \quad (1.40.a)$$

$$A_m(z) = -i \frac{\kappa}{|\kappa|} \sinh(|\kappa|z) A_p(0) \quad (1.40.b)$$

其中  $\kappa = \sqrt{\kappa_p \kappa_m}$ ， $A_p(0)$  为 probe 光在  $z=0$  处的边界值。图 1.4 为两束光的强度随  $z$  的变化曲线，这里没有考虑介质损耗和增益的饱和。



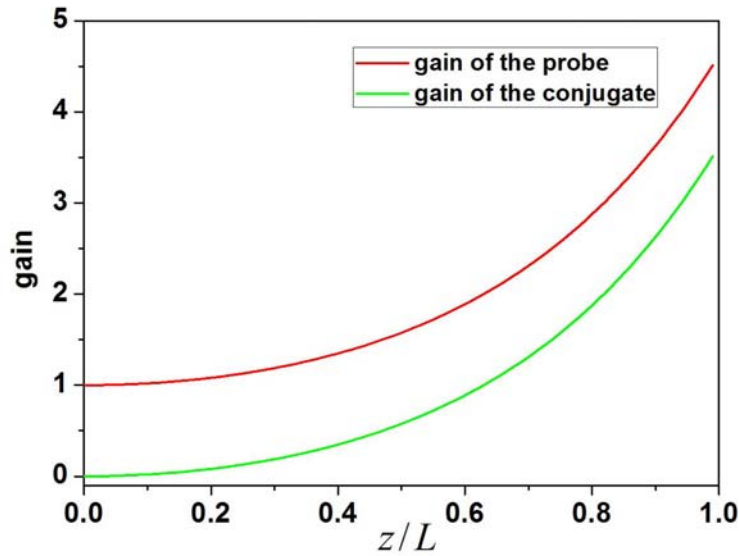


图 1.4 理论计算 FWM 过程 probe 光和 conjugate 光的增益随传播距离变化的曲线

### 1. 2. 5 四波混频过程增益的实验观察

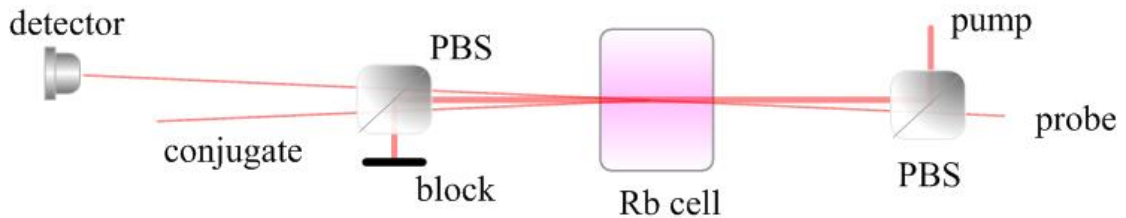


图 1.5 四波混频过程 probe 光的增益测量光路

在实验过程中，我们利用相干公司生产的 Ti:sapphire 激光器作为 pump 光，其输出功率在 795nm 附近为 800mW，通过微小扫描标准具的角度，Ti:sapphire 激光器输出频率可以扫描 20GHz 的范围。Ti:sapphire 激光器的输出光被分成三部分，其中较强的部分作为 FWM 的 pump 光，较弱的部分分别用作 FWM 的 probe 光和饱和吸收谱。在测量增益的实验中，由于上述三束光频率同时变化，probe 光频率不能单独扫描，所以需要利用另一束光来探测。实验中我们采用 Toptica 公司生产的 DL100 激光器，其中心频率为 795nm，频率调谐范围可通过扫描压电陶瓷和驱动电流也可达到 20GHz。Toptica 激光器的输出光空间模式较差，因此将其首先耦合进单模保偏光纤，然后将 pump 光与这束光在铷泡内重合。重合角度很小，约为 4mrad。铷泡是

由 Triad Technolog 生产的 TT-RB-15-Q-AR 型，长为 15mm，直径 25mm，气室两个窗口镜厚度为 3mm，镀有减反膜，在 795nm 附近反射率小于 0.1%。其中 Rb85 和 87 原子为自然混合，原子数目所占比值为 72.2%和 27.8%。实验装置如图 1.5 所示。

为了满足平面波近似，同时为避免 pump 光功率过强而引起的自聚焦效应<sup>[1.23,1.24,1.25]</sup>，实验中 pump 光用一个焦距为 800mm 的平凸透镜会聚在两束光的交点处，腰斑半径为 800  $\mu\text{m}$ ，Rayleigh 长度为 2.5m。probe 光用一个焦距为 630mm 的平凸透镜会聚，腰斑半径为 360  $\mu\text{m}$ ，Rayleigh 长度为 0.5m。

铷 85 原子有两个跃迁精细结构，分别是 D1 线 795nm 对应从基态  $5S_{1/2}$  到激发态  $5P_{1/2}$ ，和 D2 线 780nm 对应从基态  $5S_{1/2}$  到激发态  $5P_{3/2}$ 。实验中我们选择铷 85 原子的 D1 作为 FWM 实验的原子跃迁能级。超精细能级结构如图 1.6 所示。图 1.7 为 D1 线对应的饱和吸收谱。因为 Ti: sapphire 激光器是通过扫描标准具来扫描输出的频率，所以速度很慢，饱和吸收谱很容易受到外界的影响，因此信噪比很差。为提高信噪比，我们将用作饱和吸收谱的铷泡加热到 60°C，以提高原子数密度，提高信噪比，如图 1.7 所示。

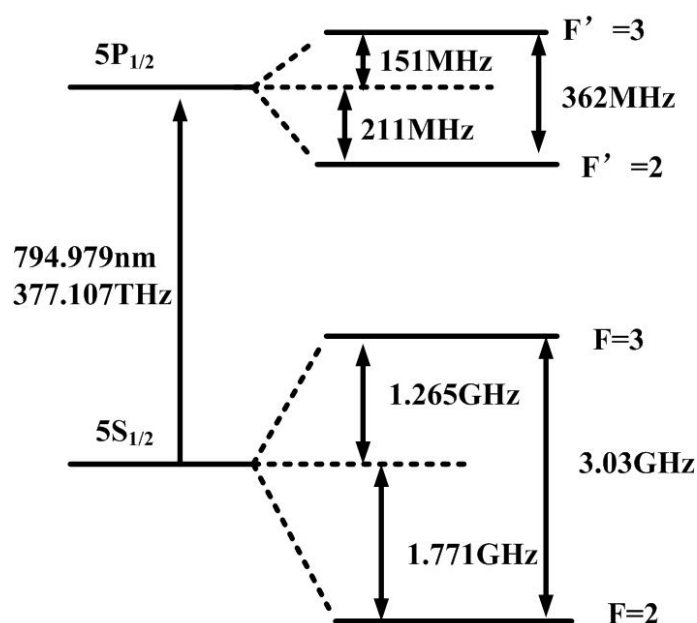


图 1.6 铷 85 原子的 D1 线超精细结构能级图

实验过程中，首先将 Ti: sapphire 激光器输出光的波长调节到  $^{85}\text{Rb}$  的 D1 线附近，开启 probe 光，使其在 D1 线附近大范围扫描，同时缓慢升高铷泡的温度。在温度升高的过程中不断改变 pump 光的失谐，观察 probe 光的增益。实验中在 pump 光相对于 F=2-F' 跃迁线正失谐约 1GHz 处，probe 光的获得最大 4-5 倍的增益，此时铷泡的

温度为 148°C。

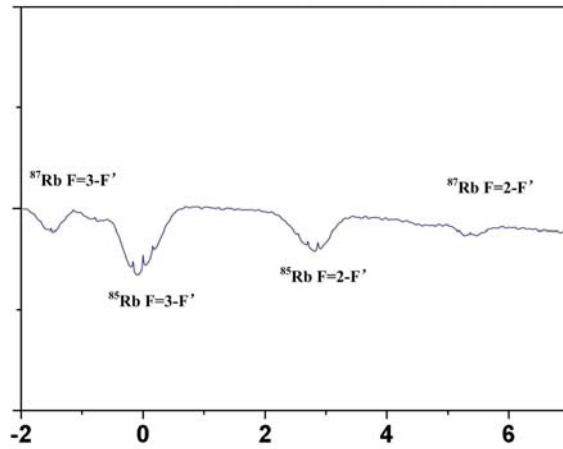


图 1.7 扫描 Ti:sapphire 激光器频率的饱和吸收谱

如图 1.8, 为 probe 光的增益测量数据。图中在 probe 光相对于 pump 光失谐  $\pm 3\text{GHz}$  处出现两个增益峰, 分别对应 FWM 产生的 anti-Stokes 光和 Stokes 光的位置, 增益约为 4。单光子失谐在相对于  $F=2-F'$  跃迁线  $+200\text{MHz}$  到  $+1\text{GHz}$  范围内, probe 光增益从 1.5 提高到 4-5 左右, 继续增大失谐到  $1.5\text{GHz}$  时, 增益则又降到 1.5 左右, 一般来说 pump 光接近跃迁线时, 会因为相干增强而提高 FWM 的非线性强度, 但是由于此时 Stokes 光正好位于  $F=3-F'$  跃迁的吸收线范围内, 所以增益反而降低。而当单光子失谐到  $1.5\text{GHz}$  时, 一方面由于单光子失谐增大, 另一方面 Stokes 光又正好位于  $F=2-F'$  跃迁的吸收线范围内, 所以增益也变小。而温度对于增益的影响, 主要有两个方面, 首先是变化温度会改变 FWM 过程参与作用的粒子数, 从而改变介质的色散而影响相位匹配。另一方面是在较高温度来自于自聚焦效应的影响。所以最后将温度设置在了增益较大, 而且自聚焦影响较小的工作点  $148^\circ\text{C}$ 。

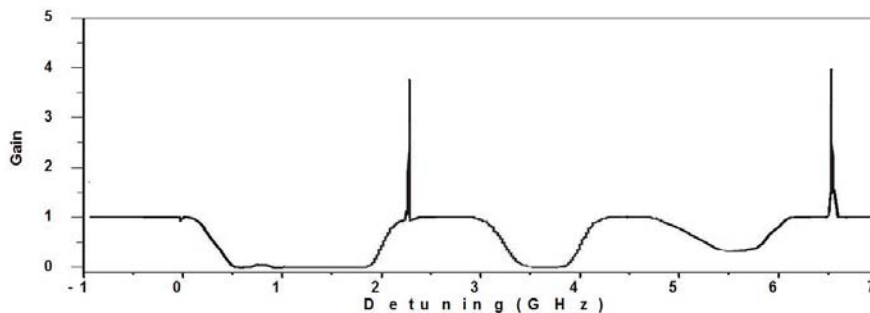


图 1.8 probe 光在单光子失谐 1GHz 时的增益

### 1. 3 四波混频过程产生强关联光束

#### 1. 3. 1 双模压缩态光场的相关理论

在 FWM 过程中，湮灭一个 pump 光子产生一个 probe 光子或 conjugate 光子，相互作用 Hamiltonian 可以写为：

$$\hat{H} = i\hbar\beta\hat{b}^\dagger\hat{c}\hat{a}^\dagger\hat{c} - i\hbar\beta\hat{b}\hat{c}^\dagger\hat{a}\hat{c}^\dagger \quad (1.41)$$

在实验过程中 pump 光的强度一般都很大，假设在此过程中假设 pump 光没有损耗，即  $\hat{c}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$ 。用  $\alpha$  代替  $\hat{c}$ ，并定义常数  $\xi = \beta\alpha^2 = \beta\alpha^{*2}$ ，则 1.38 式变为：

$$\hat{H} = i\hbar\xi\hat{b}^\dagger\hat{a}^\dagger - i\hbar\xi\hat{b}\hat{a} \quad (1.42)$$

相应的时间演化算符：

$$\hat{U}(t) = e^{-i\hat{H}t/\hbar} = e^{\xi(\hat{b}^\dagger\hat{a}^\dagger - \hat{a}\hat{b})t} \quad (1.43)$$

如果该过程在  $\tau$  时间内完成，并令  $r = \xi\tau$ ，则上式变为：

$$\hat{S} = \hat{U}(\tau) = e^{r(\hat{b}^\dagger\hat{a}^\dagger - \hat{a}\hat{b})} \quad (1.44)$$

由 Heisenberg 表象算符的时间演化方程可得 probe 光和 conjugate 光的场演化方程为：

$$\frac{d}{dt}\hat{a} = \frac{i}{\hbar}[\hat{H}, \hat{a}] = \xi\hat{b}^\dagger \quad (1.45.a)$$

$$\frac{d}{dt}\hat{b}^\dagger = \frac{i}{\hbar}[\hat{H}, \hat{b}^\dagger] = \xi\hat{a} \quad (1.45.b)$$

求解上方程组可得 FWM 过程后输出场的表达式为：

$$\hat{a}_{out} = \cosh(r)\hat{a}_{in} + \sinh(r)\hat{b}_{in}^\dagger \quad (1.46.a)$$

$$\hat{b}_{out}^\dagger = \cosh(r)\hat{b}_{in}^\dagger + \sinh(r)\hat{a}_{in} \quad (1.46.b)$$

其中  $\hat{a}_{in}$  和  $\hat{b}_{in}$  为输入场的湮灭算符， $\hat{a}_{out}$  和  $\hat{b}_{out}$  为输出场的湮灭算符。定义增益系数

$G = \cosh^2(r)$ ，进而有  $G - 1 = \sinh^2(r)$ ，所以上式可化为：

$$\hat{a}_{out} = \sqrt{G}\hat{a}_{in} + \sqrt{G-1}\hat{b}_{in}^\dagger \quad (1.47.a)$$

$$\hat{b}_{out}^\dagger = \sqrt{G}\hat{b}_{in}^\dagger + \sqrt{G-1}\hat{a}_{in} \quad (1.47.b)$$

由上式可得所产生的 probe 光和 conjugate 光的光子数为：

$$\hat{N}_{probe} = \hat{a}_{out}^\dagger \hat{a}_{out} = G \hat{a}_{in}^\dagger \hat{a}_{in} + (G-1) \hat{b}_{in}^\dagger \hat{b}_{in} + \sqrt{G(G-1)} \hat{a}_{in}^\dagger \hat{b}_{in} + \sqrt{G(G-1)} \hat{b}_{in}^\dagger \hat{a}_{in} \quad (1.48.a)$$

$$\hat{N}_{conj} = \hat{b}_{out}^\dagger \hat{b}_{out} = G \hat{b}_{in}^\dagger \hat{b}_{in} + (G-1) \hat{a}_{in}^\dagger \hat{a}_{in} + \sqrt{G(G-1)} \hat{b}_{in}^\dagger \hat{a}_{in} + \sqrt{G(G-1)} \hat{a}_{in}^\dagger \hat{b}_{in} \quad (1.48.b)$$

由于 FWM 中 conjugate 光注入的为真空场，所以得：

$$\langle \hat{N}_{probe} \rangle = G \langle \hat{a}_{in}^\dagger \hat{a}_{in} \rangle + (G-1) \quad (1.49.a)$$

$$\langle \hat{N}_{conj} \rangle = (G-1) \langle \hat{a}_{in}^\dagger \hat{a}_{in} \rangle + (G-1) \quad (1.49.b)$$

如果假设实验注入的光子数远大于 1，则 FWM 后产生的总的光子数和光子数之差为：

$$\langle \hat{N}_{probe} \rangle + \langle \hat{N}_{conj} \rangle = (2G-1) \langle \hat{a}_{in}^\dagger \hat{a}_{in} \rangle \quad (1.50.a)$$

$$\langle \hat{N}_{probe} \rangle - \langle \hat{N}_{conj} \rangle = \langle \hat{a}_{in}^\dagger \hat{a}_{in} \rangle \quad (1.50.b)$$

所以由上式可以看出，FWM 使 probe 光和 conjugate 光的总光子数（总光强）增加，但是在 probe 光和 conjugate 光增加了相同的光子数，所以两束光的光子数差没有变化。因此强度差方差为：

$$\langle (\hat{N}_{probe} - \hat{N}_{conj})^2 \rangle - \langle \hat{N}_{probe} - \hat{N}_{conj} \rangle^2 = \langle (\hat{a}_{in}^\dagger \hat{a}_{in}) \rangle - \langle \hat{a}_{in}^\dagger \hat{a}_{in} \rangle^2 = \langle \hat{a}_{in}^\dagger \hat{a}_{in} \rangle \quad (1.51)$$

上式说明 probe 光和 conjugate 光增加的强相互关联的光子对，并没有增加两束光之间的相对噪声。而散粒噪声在 FWM 后应为其 probe 光和 conjugate 光总光强的强度噪声：

$$\langle (\hat{N}_{probe} + \hat{N}_{conj})^2 \rangle - \langle \hat{N}_{probe} + \hat{N}_{conj} \rangle^2 = (2G-1) \langle (\hat{a}_{in}^\dagger \hat{a}_{in}) \rangle - \langle \hat{a}_{in}^\dagger \hat{a}_{in} \rangle^2 = (2G-1) \langle \hat{a}_{in}^\dagger \hat{a}_{in} \rangle \quad (1.52)$$

所以强度差压缩为：

$$Sq = \text{Log}_{10} \frac{\langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle}{(2G-1) \langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle} = -\text{Log}_{10}(2G-1) \quad (1.53)$$

### 1. 3. 2 强度差压缩光的探测

[1.17]中采用直接探测的方法测量相对强度差压缩，利用两个平衡探测器分别测量 probe 光和 conjugate 光，两个探测器的差作为强度差压缩噪声谱，但是在实验的过程中，必须用另外两束与 probe 光和 conjugate 光光强相等的光束照射两个探测器，将它们的差作为散粒噪声基准。但是如果 probe 光和 conjugate 光的功率变化，就必

须重新校准散粒噪声基准，所以给实验带来诸多不便，我们实验中的探测系统很好的解决了这个问题。

在我们的实验中采用如图 1.9 所示的探测系统来测量相对强度差压缩，FWM 后的 probe 和 conjugate 光分别通过两套相同的自零拍探测系统<sup>[1.26,1.27]</sup>，下面是对利用该探测系统测量强度差压缩的相应的理论分析。

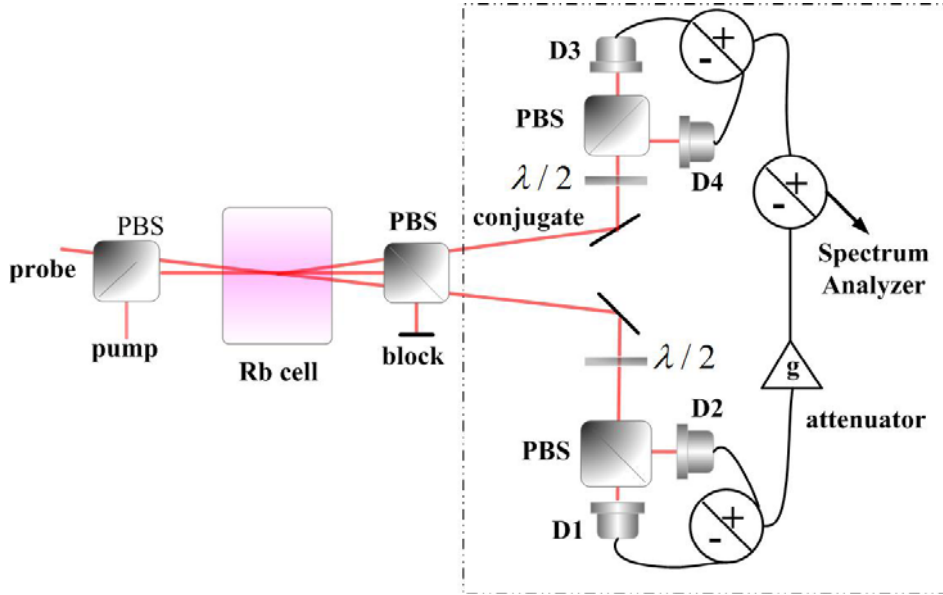


图 1.9 四波混频过程探测系统

FWM 的输出场 probe 光和 conjugate 光分别经过 50/50 分束器后，输出光表示为：

$$\hat{d}_1 = t_p \hat{a}_{out} + r_p \hat{b}_{vp} \quad (1.54.a)$$

$$\hat{d}_2 = r_p \hat{a}_{out} + t_p \hat{b}_{vp} \quad (1.54.b)$$

$$\hat{d}_3 = t_c \hat{b}_{out} + r_c \hat{b}_{vc} \quad (1.54.c)$$

$$\hat{d}_4 = r_c \hat{b}_{out} + t_c \hat{b}_{vc} \quad (1.54.d)$$

其中  $t_{p,c}$  和  $r_{p,c}$  分别是两个探测通道分束器的透射和反射系数系数，满足  $t_{p,c}^2 + r_{p,c}^2 = 1$  和  $r_{p,c}^* t_{p,c} + t_{p,c}^* r_{p,c} = 0$ 。  $\hat{b}_{vp,vc}$  分别是两个分束器耦合进的真空场。通过两对平衡探测器探测，探测器出来的光电流可表示为：

$$i_1 = \hat{d}_1^\dagger \hat{d}_1 = t_p^* t_p \hat{a}_{out}^\dagger \hat{a}_{out} + r_p r_p \hat{b}_{vp}^\dagger \hat{b}_{vp} + t_p r_p \hat{a}_{out}^\dagger \hat{b}_{vp} + r_p t_p \hat{b}_{vp}^\dagger \hat{a}_{out} \quad (1.55.a)$$

$$i_2 = \hat{d}_2^\dagger \hat{d}_2 = r_p^* r_p \hat{a}_{out}^\dagger \hat{a}_{out} + t_p t_p \hat{b}_{vp}^\dagger \hat{b}_{vp} + r_p t_p \hat{a}_{out}^\dagger \hat{b}_{vp} + t_p r_p \hat{b}_{vp}^\dagger \hat{a}_{out} \quad (1.55.b)$$

$$i_3 = \hat{d}_3^\dagger \hat{d}_3 = t_c^* t_c \hat{b}_{out}^\dagger \hat{b}_{out} + r_c r_c \hat{b}_{vc}^\dagger \hat{b}_{vc} + t_c r_c \hat{b}_{out}^\dagger \hat{b}_{vc} + r_c t_c \hat{b}_{vc}^\dagger \hat{b}_{out} \quad (1.55.c)$$

$$i_4 = \hat{d}_4^\dagger \hat{d}_4 = r_p^* r_p \hat{b}_{out}^\dagger \hat{b}_{out} + t_p t_p \hat{b}_{vc}^\dagger \hat{b}_{vc} + r_p t_p \hat{b}_{out}^\dagger \hat{b}_{vc} + t_p r_p \hat{b}_{vc}^\dagger \hat{b}_{out} \quad (1.55.d)$$

两对平衡探测器的光电流的和与差为：

$$i_{p+} = i_1 + i_2 = \hat{d}_1^\dagger \hat{d}_1 + \hat{d}_2^\dagger \hat{d}_2 = \hat{a}_{out}^\dagger \hat{a}_{out} + \hat{b}_{vp}^\dagger \hat{b}_{vp} \quad (1.56.a)$$

$$i_{p-} = i_1 - i_2 = \hat{d}_1^\dagger \hat{d}_1 - \hat{d}_2^\dagger \hat{d}_2 = i \hat{a}_{out}^\dagger \hat{b}_{vp} - i \hat{b}_{vp}^\dagger \hat{a}_{out} \quad (1.56.b)$$

$$i_{c+} = i_3 + i_4 = \hat{d}_3^\dagger \hat{d}_3 + \hat{d}_4^\dagger \hat{d}_4 = \hat{b}_{out}^\dagger \hat{b}_{out} + \hat{b}_{vc}^\dagger \hat{b}_{vc} \quad (1.56.c)$$

$$i_{c-} = i_3 - i_4 = \hat{d}_3^\dagger \hat{d}_3 - \hat{d}_4^\dagger \hat{d}_4 = i \hat{b}_{out}^\dagger \hat{b}_{vc} - i \hat{b}_{vc}^\dagger \hat{b}_{out} \quad (1.56.d)$$

根据 1.47 式，可得：

$$\hat{a}_{out}^\dagger \hat{a}_{out} = G \hat{a}_{in}^\dagger \hat{a}_{in} + (G-1) \hat{b}_{in}^\dagger \hat{b}_{in} + \sqrt{G(G-1)} \hat{a}_{in}^\dagger \hat{b}_{in} + \sqrt{G(G-1)} \hat{b}_{in} \hat{a}_{in} \quad (1.57.a)$$

$$\hat{b}_{out}^\dagger \hat{b}_{out} = G \hat{b}_{in}^\dagger \hat{b}_{in} + (G-1) \hat{a}_{in} \hat{a}_{in}^\dagger + \sqrt{G(G-1)} \hat{b}_{in}^\dagger \hat{a}_{in} + \sqrt{G(G-1)} \hat{a}_{in} \hat{b}_{in} \quad (1.57.b)$$

将上式和 1.47 式代入 1.56 式得：

$$i_{p+} = G \hat{a}_{in}^\dagger \hat{a}_{in} + (G-1) \hat{b}_{in}^\dagger \hat{b}_{in} + \sqrt{G(G-1)} \hat{a}_{in}^\dagger \hat{b}_{in} + \sqrt{G(G-1)} \hat{b}_{in} \hat{a}_{in} + \hat{b}_{vp}^\dagger \hat{b}_{vp} \quad (1.58.a)$$

$$i_{p-} = i \sqrt{G} \hat{a}_{in}^\dagger \hat{b}_{vp} - i \sqrt{G} \hat{b}_{vp}^\dagger \hat{a}_{in} \quad (1.55.b)$$

$$i_{c+} = G \hat{b}_{in}^\dagger \hat{b}_{in} + (G-1) \hat{a}_{in} \hat{a}_{in}^\dagger + \sqrt{G(G-1)} \hat{b}_{in}^\dagger \hat{a}_{in} + \sqrt{G(G-1)} \hat{a}_{in} \hat{b}_{in} + \hat{b}_{vc}^\dagger \hat{b}_{vc} \quad (1.58.c)$$

$$i_{c-} = i \sqrt{G-1} \hat{a}_{in} \hat{b}_{vc} - i \sqrt{G-1} \hat{b}_{vc}^\dagger \hat{a}_{in} \quad (1.58.d)$$

利用线性化算符关系，明亮光场的产生和湮灭算符可表示为光场幅度的并均值和量子涨落之和，即为：

$$\hat{a} = \alpha + \delta \hat{a} \quad (1.59)$$

根据算符的傅里叶变换：

$$\delta \hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \delta \hat{a}(t) e^{-i\Omega t} \quad (1.60)$$

其中  $\Omega$  为分析频率的边带。相应的正交振幅和正交相位涨落写为：

$$\delta \hat{X} = \delta \hat{a}(\Omega) + \delta \hat{a}^\dagger(\Omega) \quad (1.61.a)$$

$$\delta \hat{Y} = -i[\delta \hat{a}(\Omega) - \delta \hat{a}^\dagger(\Omega)] \quad (1.61.b)$$

在这里我们为简化计算将前面的系数定为 1，与 1.1 式并不冲突。由上式可得光电流的起伏为：

$$\delta i_{p+} = G \alpha \delta \hat{X}_{ain} + \sqrt{G(G-1)} \alpha \delta \hat{X}_{bin} \quad (1.62.a)$$

$$\delta i_{p-} = \sqrt{G}\alpha\delta\hat{Y}_{vp} \quad (1.62.b)$$

$$\delta i_{c+} = (G-1)\alpha\delta\hat{X}_{ain} + \sqrt{G(G-1)}\alpha\delta\hat{X}_{bin} \quad (1.62.c)$$

$$\delta i_{c-} = \sqrt{G-1}\alpha\delta Y_{vc} \quad (1.62.d)$$

其中  $\hat{X}_{ain}$  和  $\hat{X}_{bin}$  分别为 probe 光和 conjugate 光的正交振幅算符,  $\hat{Y}_{vp}$  和  $\hat{Y}_{vc}$  为自零拍探测系统 50/50 分束器的另一端引入的真空场的正交位相算符。所以两对平衡探测器的和之和、之差, 以及差之和与差分别为:

$$\delta i_{p+} + \delta i_{c+} = (2G-1)\alpha\delta\hat{X}_{ain} + 2\sqrt{G(G-1)}\alpha\delta\hat{X}_{bin} \quad (1.63.a)$$

$$\delta i_{p+} - \delta i_{c+} = \alpha\delta\hat{X}_{ain} \quad (1.63.b)$$

$$\delta i_{p-} + \delta i_{c-} = \sqrt{G}\alpha\delta\hat{Y}_{vp} + \sqrt{G-1}\alpha\delta\hat{Y}_{vc} \quad (1.63.c)$$

$$\delta i_{p-} - \delta i_{c-} = \sqrt{G}\alpha\delta Y_{vp} - \sqrt{G-1}\alpha\delta Y_{vc} \quad (1.63.d)$$

所以两对自平衡探测器的和之和、之差, 以及差之和与差的方差分别为:

$$Va[\delta i_{p+} + \delta i_{c+}] = (2G-1)^2\alpha^2\delta^2\hat{X}_{ain} + 4G(G-1)\alpha^2\delta^2\hat{X}_{bin} \quad (1.64.a)$$

$$Va[\delta i_{p+} - \delta i_{c+}] = \alpha^2\delta^2\hat{X}_{ain} \quad (1.64.b)$$

$$Va[\delta i_{p-} + \delta i_{c-}] = G\alpha^2\delta^2\hat{Y}_{vp} + (G-1)\alpha^2\delta^2\hat{Y}_{vc} \quad (1.64.c)$$

$$Va[\delta i_{p-} - \delta i_{c-}] = G\alpha^2\delta^2 Y_{vp} + (G-1)\alpha^2\delta^2 Y_{vc} \quad (1.64.d)$$

如果 probe 为理想的相干光, 并且我们设:

$$\delta^2\hat{X}_{ain} = \delta^2\hat{Y}_{cp} = \delta^2\hat{Y}_{cv} = 1 \quad (1.65)$$

所以 1.64 式化为:

$$Va[\delta i_{p+} + \delta i_{c+}] = (2G-1)^2\alpha^2 + 4G(G-1)\alpha^2 \quad (1.66.a)$$

$$Va[\delta i_{p+} - \delta i_{c+}] = \alpha^2 \quad (1.66.b)$$

$$Va[\delta i_{p-} + \delta i_{c-}] = (2G-1)\alpha^2 \quad (1.66.c)$$

$$Va[\delta i_{p-} - \delta i_{c-}] = (2G-1)\alpha^2 \quad (1.66.d)$$

由上式可以看出, 该探测系统两对平衡探测器的差的和或差为散粒噪声基准, 和之差为压缩, 和之和描述的是放大的噪声。在理想情况下 1.66.b 式为常数, 其值等于增益前入射的 probe 的光电流涨落方差, 1.66.c 为增益后单臂 probe 的光电流涨落



方差  $G\alpha^2$  与 conjugate 光的电流涨落方差  $(G-1)\alpha^2$  之和，这说明，由于增益 probe 光和 conjugate 光的两束光的单臂光强和总光强增加，但是由于在两束光上增加的光子之间的强关联特性，而使两束光的相对强度差噪声并没有增加。定义噪声因数为：

$$NF_{SNL} = 10 \text{Log} \frac{Va[\delta i_{p-} \pm \delta i_{c-}]}{Va[\delta i_{p-} \pm \delta i_{c-}]} = 0 \quad (1.67.a)$$

$$NF_{anti-sq} = 10 \text{Log} \frac{Va[\delta i_{p+} + \delta i_{c+}]}{Va[\delta i_{p-} \pm \delta i_{c-}]} = 10 \text{Log} \frac{(2G-1)^2 + 4G(G-1)}{(2G-1)} \quad (1.67.b)$$

$$NF_{sq} = 10 \text{Log} \frac{Va[\delta i_{p+} - \delta i_{c+}]}{Va[\delta i_{p-} \pm \delta i_{c-}]} = 10 \text{Log} \frac{1}{(2G-1)} \quad (1.67.c)$$

如果在 conjugate 光的自平衡探测系统这一臂插入一个可调节的电子衰减器  $g$ ，则 1.64 式可化为：

$$Va[\delta i_{p-} \pm \delta i_{c-}] = Va \left\{ \frac{ga}{\sqrt{2[(ga)^2 + b^2]}} \delta \hat{Y}_{vp} \pm \frac{b}{\sqrt{2[(ga)^2 + b^2]}} \delta \hat{Y}_{vc} \right\} = 1 \quad (1.68.a)$$

$$Va[\delta i_{p+} - \delta i_{c+}] = Va \left\{ \frac{ga}{\sqrt{2[(ga)^2 + b^2]}} \delta \hat{X}_{aout} - \frac{b}{\sqrt{2[(ga)^2 + b^2]}} \delta \hat{X}_{bout} \right\} \quad (1.68.b)$$

其中  $\hat{X}_{aout}$  和  $\hat{X}_{bout}$  为 probe 光和 conjugate 光输出场的正交振幅算符。上式中已经对各式进行了归一化，所以当：

$$g = \frac{\sqrt{G-1}}{G} \quad (1.69)$$

时，1.68.b 式的值为：

$$sq = e^{-2r} \quad (1.70)$$

该值与平衡零拍探测的结果一致。在两套自零拍探测系统的一臂上加入一个经典的电子衰减器后，得到了和平衡零拍探测系统相同的结果，但是这里省去了利用平衡零拍探测调节干涉度的复杂工作，因此就我们的实验而言会使实验过程大为简化。

### 1. 3. 3 FWM 过程中的损耗分析

实际上 FWM 过程的增益过程也伴随着吸收，Yuen<sup>[1.28]</sup>和 Reid<sup>[1.29]</sup>已经理论分析了由于介质的损耗对压缩产生的影响。最近 McCorick<sup>[1.18]</sup> 和 Jasperse<sup>[1.30]</sup>提出了一种分析损耗对 FWM 产生压缩的影响的几何的理论方法-分布式增益/损耗理论，物理图

像非常简洁清晰。在该理论中，FWM 过程被分成许多增益和吸收过程，增益过程和吸收过程被完全分开，相互独立，互不影响，如图 1.10 所示。增益过程看做是完全理想的，其中没有任何损耗，而吸收过程被视为是绝对的损耗，没有增益。吸收过程可用分光镜模型来处理，在吸收过程中，分光镜分出一部分光，同时耦合进真空场。下面我们结合我们的探测系统，用一个增益/吸收过程来分析我们的实验。

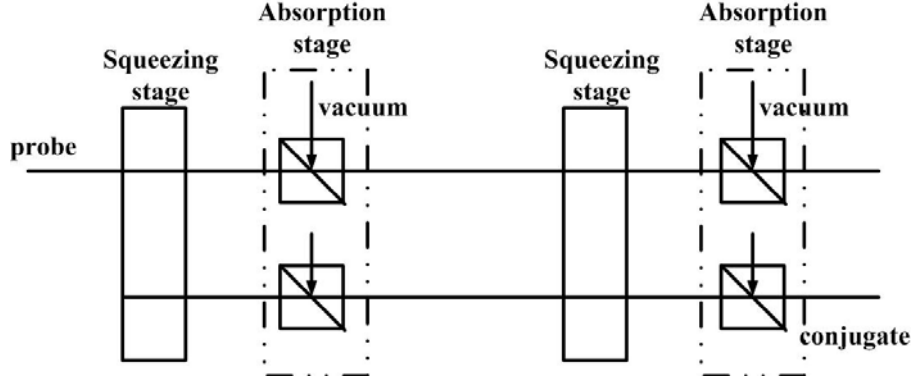


图 1.10 分布式增益/损耗理论示意图

引入损耗后，由 1.47 式可以得到 FWM 的输出场的方程可写为：

$$\hat{c} = \sqrt{\eta_a} \hat{a}_{out} + \sqrt{1-\eta_a} \hat{b}_{cl}^\dagger \quad (1.71.a)$$

$$\hat{d} = \sqrt{\eta_b} \hat{b}_{out} + \sqrt{1-\eta_b} \hat{d}_{dl}^\dagger \quad (1.71.b)$$

其中  $\hat{b}_{cl,dl}^\dagger$  分别是 probe 光 conjugate 光在损耗过程中引入的真空场的湮灭算符。所以两对自平衡探测器的各自和与差为：

$$i_{p+} = \eta_a G \alpha \delta \hat{X}_{ain} + \eta_a \sqrt{G(G-1)} \alpha \delta \hat{X}_{bin} + \sqrt{\eta_a(1-\eta_a)} G \delta \hat{X}_{bcl} \quad (1.72.a)$$

$$i_{p-} = \sqrt{\eta_a} G \alpha \delta \hat{Y}_{vc} \quad (1.72.b)$$

$$i_{c+} = \eta_b (G-1) \alpha \delta \hat{X}_{ain} + \eta_b \sqrt{G(G-1)} \alpha \delta \hat{X}_{bin} + \sqrt{\eta_b(1-\eta_b)} (G-1) \delta \hat{X}_{dcl} \quad (1.72.c)$$

$$i_{c-} = \sqrt{\eta_b} (G-1) \alpha \delta \hat{Y}_{vd} \quad (1.72.d)$$

其中  $\hat{X}_{bcl}$  和  $\hat{X}_{dcl}$  为损耗过程中在两光束上引入的真空场正交振幅算符， $\hat{Y}_{vc}$  和  $\hat{Y}_{vd}$  为从探测系统中 50/50 分束器引入的真空场的正交相位算符。由上式可得这两光电流的各自和与差的涨落为：

$$\begin{aligned} Va[\delta i_{p+} + \delta i_{c+}] &= [\eta_a G + \eta_b (G-1)]^2 \alpha^2 \delta^2 \hat{X}_{ain} \\ &+ (\eta_a + \eta_b)^2 G(G-1) \alpha^2 \delta^2 \hat{X}_{bin} + \eta_a (1-\eta_a) G \alpha^2 \delta^2 \hat{X}_{bcl} \\ &+ \eta_b (1-\eta_b) (G-1) \alpha^2 \delta^2 \hat{X}_{dcl} \end{aligned} \quad (1.73.a)$$

$$\begin{aligned}
 Va[\delta i_{p+} - \delta i_{c+}] &= [\eta_a G - \eta_b (G-1)]^2 \alpha^2 \delta^2 \hat{X}_{ain} \\
 &+ (\eta_a - \eta_b)^2 G(G-1) \alpha^2 \delta^2 \hat{X}_{bin} + \eta_a (1-\eta_a) G \alpha^2 \delta^2 \hat{X}_{bcl} \\
 &+ \eta_b (1-\eta_b) (G-1) \alpha^2 \delta^2 \hat{X}_{bdl}
 \end{aligned} \tag{1.73.b}$$

$$Va[\delta i_{p-} + \delta i_{c-}] = \eta_a G \alpha^2 \delta^2 \hat{Y}_{vp} + \eta_b (G-1) \alpha^2 \delta^2 \hat{Y}_{vc} \tag{1.73.c}$$

$$Va[\delta i_{p-} - \delta i_{c-}] = \eta_a G \alpha^2 \delta^2 \hat{Y}_{vp} + \eta_b (G-1) \alpha^2 \delta^2 \hat{Y}_{vc} \tag{1.73.d}$$

与上式对应的噪声因数为：

$$NF_{SNL} = 10 \text{Log} \frac{Va[\delta i_{p-} \pm \delta i_{c-}]}{Va[\delta i_{p-} \pm \delta i_{c-}]} = 0 \tag{1.74.a}$$

$$\begin{aligned}
 NF_{anti-sq} &= 10 \text{Log} \{ [\eta_a G + \eta_b (G-1)]^2 \delta^2 \hat{X}_{ain} + (\eta_a + \eta_b)^2 G(G-1) \delta^2 \hat{X}_{bin} \\
 &+ \eta_a (1-\eta_a) G \delta^2 \hat{X}_{bcl} + \eta_b (1-\eta_b) (G-1) \delta^2 \hat{X}_{bdl} \} \\
 &- 10 \text{Log} [\eta_a G \alpha^2 \delta^2 \hat{Y}_{vp} + \eta_b (G-1) \alpha^2 \delta^2 \hat{Y}_{vc}]
 \end{aligned} \tag{1.74.b}$$

$$\begin{aligned}
 NF_{sq} &= 10 \text{Log} \{ [\eta_a G - \eta_b (G-1)]^2 \delta^2 \hat{X}_{ain} + (\eta_a - \eta_b)^2 G(G-1) \delta^2 \hat{X}_{bin} \\
 &+ \eta_a (1-\eta_a) G \delta^2 \hat{X}_{bcl} + \eta_a (1-\eta_b) (G-1) \delta^2 \hat{X}_{bdl} \} \\
 &- 10 \text{Log} [\eta_a G \delta^2 \hat{Y}_{vc} + \eta_b (G-1) \delta^2 \hat{Y}_{vd}]
 \end{aligned} \tag{1.74.c}$$

一般情况下，由于介质的吸收，系统的压缩度明显降低，但是我们从 1.73.b 可以看出，在某些条件下，系统的压缩会提高。如果将 1.734.b 式视为一个关于  $\eta_a$  和  $\eta_b$  的函数，我们通过选择合适的  $\eta_a$ 、 $\eta_b$  的值可以得到函数的最大值，也就是最大压缩。如图 1.11，为理论计算的 1.74.b 式在  $\eta_a$  和  $\eta_b$  的参量空间的变化。由 1.73.b 可以简单地求解出压缩取最大值的条件是：

$$\eta_a = \frac{(G-1)\delta^2 \hat{X}_{ain} + 1}{(\delta^2 \hat{X}_{ain} + 1)G - 2} \eta_b - \frac{1}{2[(\delta^2 \hat{X}_{ain} + 1)G - 2]} \tag{1.75}$$

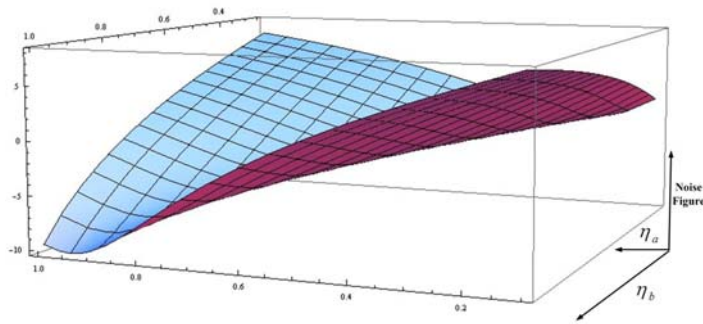


图 1.11 引入损耗后压缩噪声因数在介质吸收参量空间的变化，对应增益参量  $G=5$ 。

而且由 1.73.b 式函数可以看出，当  $\eta_a = \frac{G-1}{G} \eta_b$  时，系统的压缩完全和输入 probe

光的噪声无关，因此系统对额外的噪声不敏感。此时压缩度为：

$$NF_{sq} = 10 \text{Log} \left\{ \left[ \eta_b^2 \frac{G-1}{G} \delta^2 \hat{X}_{bin} + \eta_b (G-1) \left( 1 - \frac{G-1}{G} \right) \delta^2 \hat{X}_{bcl} + \eta_b (1-\eta_b) (G-1) \delta^2 \hat{X}_{bdl} \right] - 10 \text{Log} [\eta_b (G-1) \delta^2 \hat{Y}_{vc} + \eta_b (G-1) \delta^2 \hat{Y}_{vd}] \right\} \quad (1.76)$$

对于实验中的参量来说，这两种办法差别很小。如图 1.12 所示为理论计算的在不同的参量条件下压缩随增益变化的曲线。

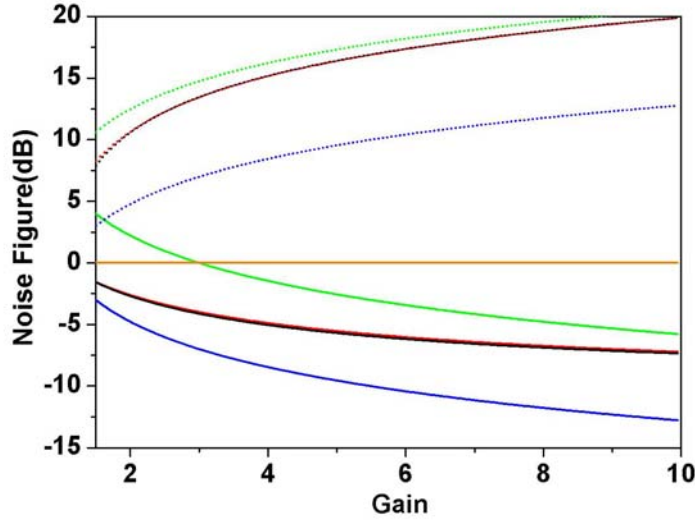


图 1.12 引入损耗后压缩随增益变化的曲线

图 1.12 中，上面的虚线为反压缩噪声因数，对应两对自零拍探测器的和之和，下面实线为压缩噪声因数对应两对子零拍探测器的和之差，中间橙色实线为散粒噪声基准，对应两对自零拍探测器的差之和或差之差。蓝线对应理想条件，即介质没有吸收，probe 光为相干光时压缩和反压缩的计算结果；黑线为最大压缩条件 1.75 式满足时，probe 光的正交振幅噪声  $\delta^2 \hat{X}_{ain} = 4$ ，probe 光的透射率  $\eta_b = 0.9$  时的结果；红线为当  $\eta_a = \frac{G-1}{G} \eta_b$  满足时，probe 光的正交振幅噪声  $\delta^2 \hat{X}_{ain} = 4$ ，probe 光的透射率  $\eta_b = 0.9$  时的结果；绿线为 probe 光的正交振幅噪声  $\delta^2 \hat{X}_{ain} = 4$ ，probe 光和 conjugate 光的透射率  $\eta_a = \eta_b = 1$  的结果。

### 1. 3. 4 FWM 产生明亮纠缠光束的相关实验

在前面的实验中，我们测量了 probe 的增益随温度和单光子失谐的变化，为 FWM

产生压缩光实验做了必要准备。找到最大增益处的工作点后，我们期望同时能得到最大的压缩。虽然 FWM 过程对 pump 光和 probe 光的相位并不敏感，但是实验过程中为得到最大压缩，有时需要分别改变两束光的失谐，而有些情况下需要只改变其中一束光的失谐，因此使用两台激光器会带来很大的不便。同时外界噪声和温度等会对分离的两台激光器产生不同的影响，也会使系统很不稳定。所以在我们的实验中，将 Ti: sapphire 激光器的一部分光经过 AOM 移频后作为 probe 光。AOM 是 Brimrose 公司生产的，型号为：TEF-800-200-795，单次移频 800MHz，衍射效率 25%-30%。实验中 probe 光相对于 pump 光的失谐为-3GHz 左右，所以我们设计了 probe 光四次通过 AOM 的光路，如图 1.13 所示。

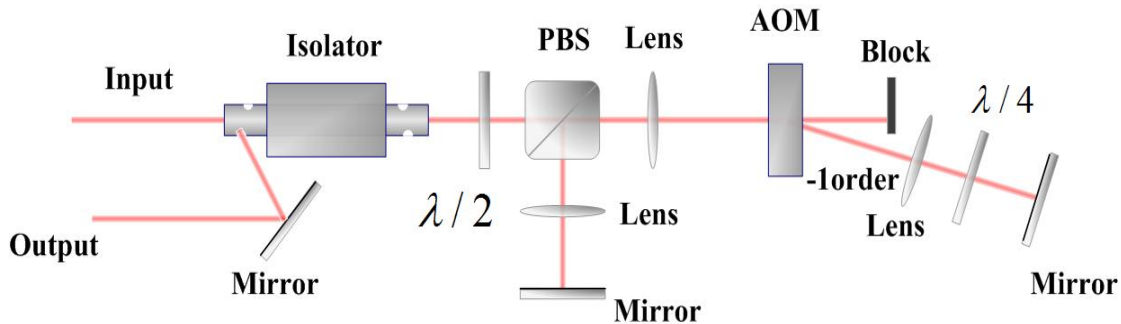


图 1.13 probe 光四次通过 AOM 移频光路图

移频系统的入射光为 p 偏振，经过隔离器， $\lambda/2$  波片和 PBS 后，仍为 p 光，我们用一个焦距为 100mm 的透镜将该光会聚到 AOM 晶体上，调节 AOM 的倾角，使 -1 级衍射光最大，-1 级衍射光再经过一个焦距为 100mm 的透镜，准直为平行光，经过  $\lambda/4$  波片后，被 0 度高反镜沿原路反射回来。但是由于两次经过  $\lambda/4$  波片，p 光变为 s 光，因此被 PBS 反射到下面，为提高三次和四次衍射效率，我们又放入了一个透镜，来进一步准直光束，再由 0 度高反镜沿原路反射回去，形成三次和四次通 AOM，最后第四次通过 AOM 的光束，由于四次通过  $\lambda/4$  波片，所以偏振又变为 p 光，而全部通过 PBS，反方向经过  $\lambda/2$  波片后，反回隔离器内，经过 Faraday 旋转器，变为 s 光，从隔离器前面窗口反射出来。

第一次通过 AOM 的衍射相率为 22%，二次衍射效率为 26%，三次和四次衍射的总效率为 6%，probe 光在 AOM 前为 80mW，最后的输出光功率约为  $300 \mu\text{W}$ 。尽管功率较低，但是已经能够满足我们实验的要求。AOM 内晶体的损伤阈值为  $5\text{W}/\text{mm}^2$ ，光束在 AOM 处的腰斑半径为  $100 \mu\text{m}$ ，光功率密度为  $2.5\text{W}/\text{mm}^2$ ，所以远低于 AOM 晶体的损伤阈值。

另外，在实验中，我们发现原有 AOM 的驱动会引入较大的额外噪声，所以我们用 Mini-Circuit 公司生产的 ZFL-2-12 射频功率放大器和 Agilent 生产的 N5183A 射频信号源代替原来的驱动。我们利用一对自零拍探测系统，测量了四次通过 AOM 后的出射光的噪声特性。如图 1.14 所示。其中红线为两个平衡探测器光电流之和的噪声谱，由 1.62 式可知，为这束光的正交振幅噪声，黑线为探测器光电流之差的噪声谱，即为从 50/50 分束器耦合进探测系统的真空噪声的正交相位分量。红线和黑线重合，说明这束光为相干光。

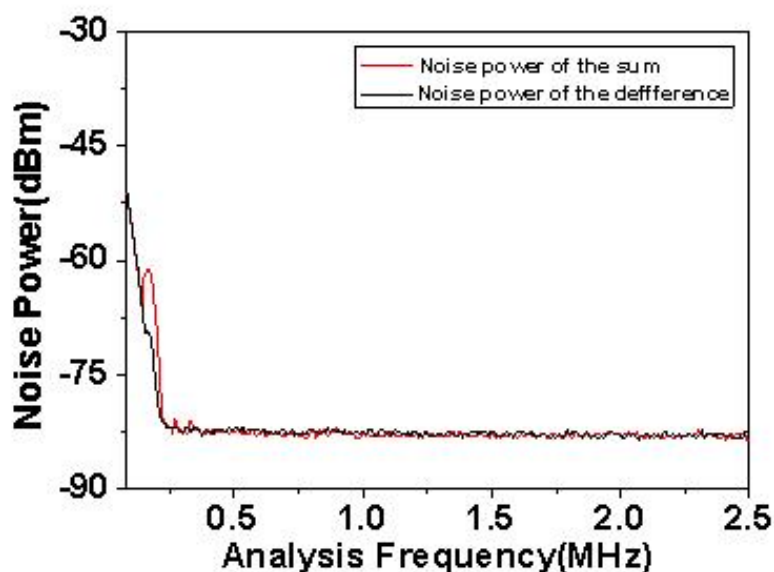


图 1.14 probe 光四次通过 AOM 后的出射光噪声测量

我们将这束光应用到我们的实验中，利用 PBS 与 1.2 节测量增益过程中使用的 Toptica 光重合，调节 Ti: sapphire 激光器的失谐和 AOM 驱动射频信号源的频率，利用两个 probe 光之间的拍频信号，将该 probe 光的频率调节到增益最大处。然后挡住原来 probe，由于增益，一束明亮的，与 probe 光空间模式反对称的 conjugate 光，在 pump 光的另一边出现，它与 probe 具有很强的量子关联，probe 光和 conjugate 光上增益产生的光子为孪生光子对。然后我们测量了强度差压缩。但是增益最大处，并没有测量到最大压缩。接下来我们进一步优化了实验参量。

铷泡温度（即原子数密度）、pump 光的功率、单光子失谐和双光子失谐，以及 pump 光和 probe 光之间的夹角均会影响 FWM 的非线性的强度，从而影响增益。1.50 式表明增益大小直接决定着压缩度。所以参量的优化首先要得到较大的增益。

如上所述，影响 FWM 产生压缩光的参量众多，在实验的过程中我们逐一进行了测量和优化：

### 1. pump 光与 probe 光的夹角对 FWM 的影响—相位匹配和色散补偿

我们首先测量了 probe 光的增益和压缩随 pump 光和 probe 光夹角的关系，如图 1.15 所示，其中黑线为增益，单位为 1，红线为压缩度，单位为 dB。在我们的实验中，铷泡温度为  $148^{\circ}\text{C}$ ，pump 光在铷泡前功率为  $510\text{mW}$ ，probe 光功率为  $45\mu\text{W}$ 。单光子相对于  $F=2-F'$  跃迁线正失谐  $900\text{MHz}$ ，双光子失谐约  $10\text{MHz}$  左右。从图中可以看出 pump 光和 probe 光的夹角为  $8\text{mrad}$  时，增益约为 10，但是此时，却没有任何压缩，其原因是在较高温度时，达到相位匹配时（ $8\text{mrad}$  约为最佳相位匹配角），非线性效应增强，而与此同时自聚焦效应也被增强，所以压缩反而降低，因此我们在实验过程中，选择了压缩较大的  $4\text{mrad}$  角。

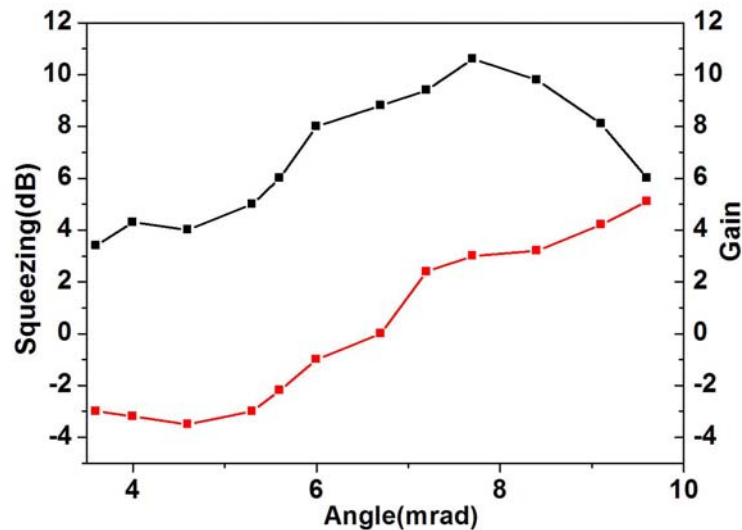


图 1.15 增益和压缩随 pump 光和 probe 光之间的夹角的变化

### 2. 在测量双光子失谐对增益和压缩的影响

首先调节单光子失谐到相对于  $F=2-F'$  跃迁线正失谐  $900\text{MHz}$  处，然后改变双光子失谐量，找到最大增益，此时的双光子失谐的大小是由 pump 光的功率和失谐所导致的 AC Stark 位移量决定。但是增益最大时对应压缩并不是最大，如图 1.16 所示，一般将 probe 相对增益最大处蓝失谐时，压缩最大<sup>[1.31]</sup>。在我们的实验中，双光子失谐量为约  $10\text{MHz}$  时，对应的压缩度最大，为  $-3.4\text{dB}$ ，增益为 4。



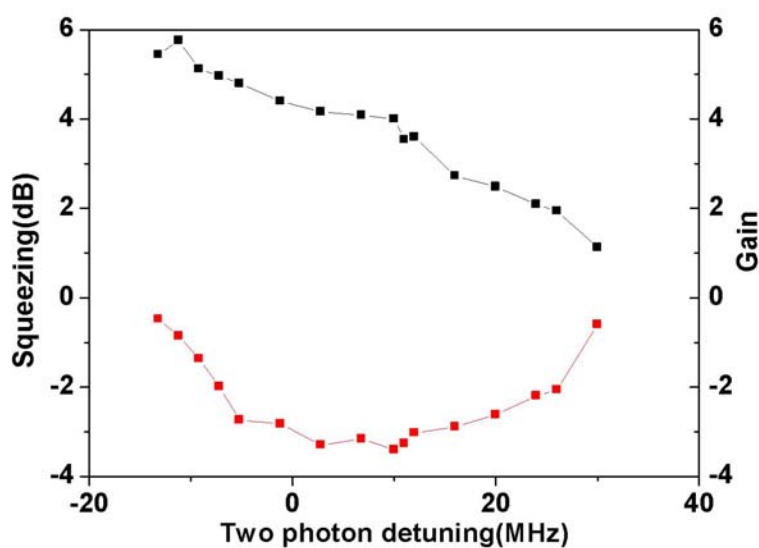


图 1.16 增益和压缩随双光子失谐的变化

### 3. 单光子失谐对增益和压缩度的影响

首先仍然调节单光子失谐到相对于  $F=2-F'$  跃迁线正失谐 900MHz 处，然后改变双光子失谐，测量到最大压缩后，固定双光子的失谐不动，改变单光子失谐，如图 1.17 所示。从图中可以看出，单光子失谐在 800MHz-1GHz 附近范围内，压缩较大，其原因主要是所产生的 probe 光和 conjugate 光相对于铷 85 和 87 原子 D2 线各跃迁线的吸收线距离较远，小的损耗会提高压缩度，而且此时增益也较大。平衡这些因素的影响，我们在单光子相对  $F=2-F'$  跃迁线正失谐为 1GHz 处，测量到最大压缩，-3.5dB。

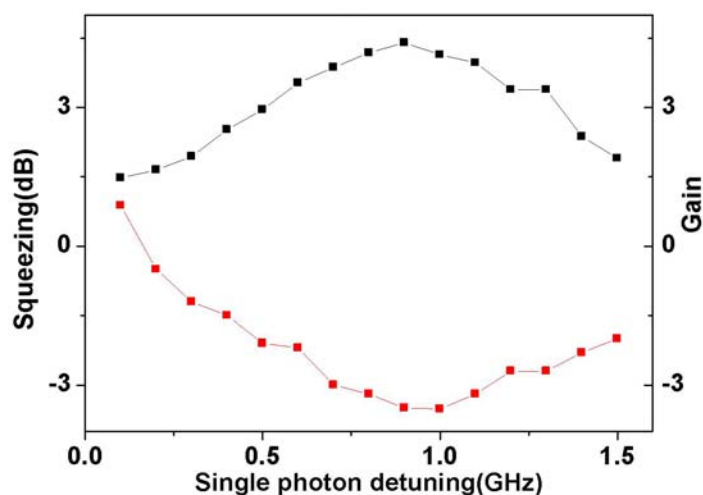


图 1.17 增益和压缩随单光子失谐的变化



#### 4. 温度对增益和压缩的影响

图 1.18 为增益和压缩随温度变化的实验数据，在测量温度的影响过程中，我们将单光子失谐到相对于  $F=2-F'$  跃迁线正失谐 1GHz 处，双光子失谐为 10MHz。为避免热弛豫对实验所产生的误差，我们将铷泡温度先升至 155°C，然后缓慢减低温度，以使系统达到充分的热平衡。在温度较高时，由于非线性效应较强，因此增益较大，但是由于较高温度时自聚焦效应的影响，压缩会变小。而在温度较低时，自聚焦效应变弱，但是非线性减弱，增益变小，所以压缩也较低。我们在中间区域，温度为 148°C 时测量到最大压缩。但是不难看出我们实验中的铷泡温度高于文献[1.13,1.18]中的温度，其原因在于我们的加热系统不同，我们实验的铷泡被放在了一个较厚的铝管内，外面的加热带较厚，所以在温度平衡时，系统的温度场梯度将会较大，而且温度传感器放在了铝管外面没有紧贴铷泡，所以测量的温度偏差较大。

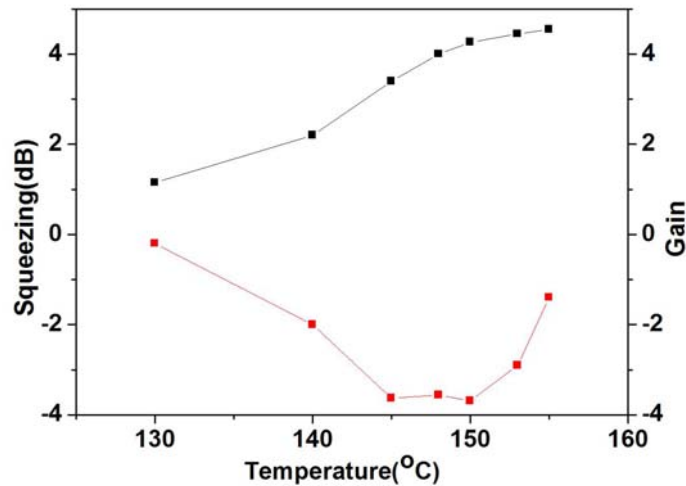


图 1.18 温度对增益和压缩的影响

综合以上主要四个因素对增益和压缩的影响后，我们最后将实验参量选择在单光子失谐约 1GHz，双光子失谐约为 10MHz，pump 光与 probe 光夹角约为 4mrad，温度为 148°C 附近。然后在小范围内微量调节各参量以达到最大压缩。最后我们测量到 -4.1dB 的压缩，如图 1.19 所示。该图中是应用我们的探测系统同时测量的五个噪声谱，其中黑线为电子学噪声，紫线为强度和噪声谱（反压缩），其对用两对自拍探测系统的和的和，蓝线和绿线为散粒噪声基准，其分别对应两对自零拍探测系统的差的差和差的和，红线为强度差压缩，对应两对自零拍探测系统的和的差。该探测

系统可以同时得到散粒噪声基准、反压缩和压缩噪声谱，使实验更容易操作。在最大压缩处，probe 光的损耗约为 10%，conjugate 光的损耗约为 4%，电子衰减器数值为 0.3dB，这些参量基本与前面的理论分析结果相吻合，但是稍有差别，其原因是我们测量过程中的误差和系统不稳定所导致。在我们的实验中 Ti: sapphire 激光器和 AOM 都放在了超净室内，输出的光通过小孔导出到外面的实验平台，一方面由于试验台的相对振动影响两个光束的重合，另一方面是超净室内的温度不太稳定，造成激光器的频率和功率漂移。这两方面的因素都对我们的实验造成了不利的影响。

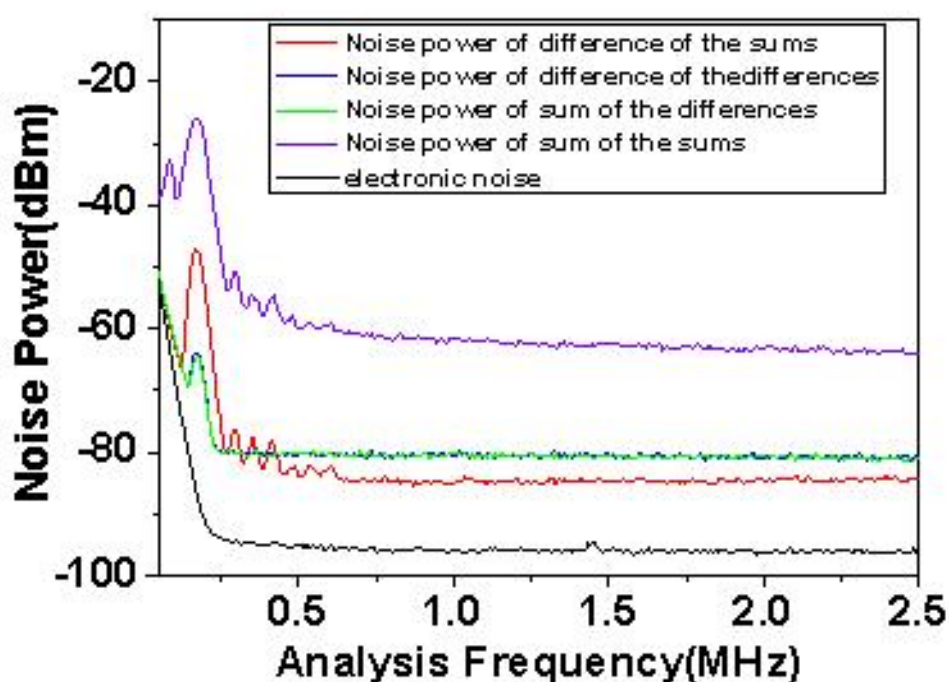


图 1.19 增益和压缩随 probe 光失谐的变化

从 1.3.3 小节的分析中，我们知道在某些参量条件下，FWM 所产生的压缩光对外界输入的额外噪声不敏感，因此我们设计了如下实验。我们用一个同样由 Brimrose 公司生产的 1.5GHzAOM 替换掉原来的 800MHzAOM，但是并没有更换该 AOM 的驱动。然后将原来的 probe 光两次通过该 AOM，输出光作为 FWM 的 probe 光。图 1.20 为该光的噪声谱，黑线为单臂自零拍探测器的差，对应从分束器耦合进入探测系统的真空噪声，红线为自零拍探测器的和，对应 probe 光的正交振幅噪声，从图中可以看出，红线高于黑线 3dB，表明有额外噪声通过该 AOM 耦合到 probe 光中。同时在 1MHz 处有一个峰，是从 AOM 的驱动电源耦合到 probe 光中的，这个较大的噪声对我们的实验造成了一定得影响。

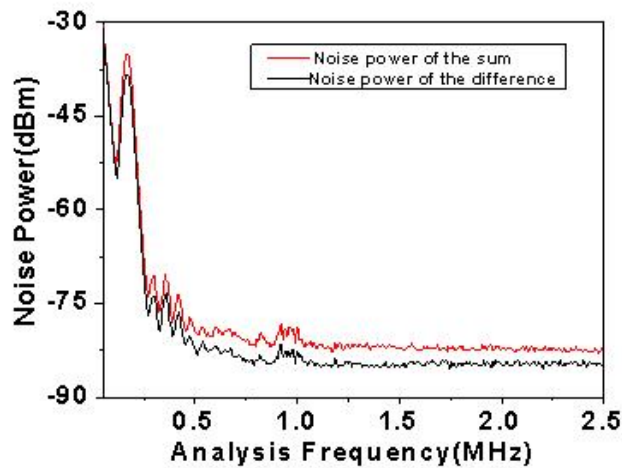


图 1.20 两次通过 1.5GHz AOM 的输出光噪声测量

我们将该光作为 probe 光应用到我们的实验中，开始我们保持实验参量与前面相同，但是我们在该参量条件下，并没有测量到最大压缩，进一步在小范围内调节各参量，最后测得 -3.7dB 压缩，如图 1.21 所示。此时单光子失谐为 950MHz 左右，双光子失谐仍为 10MHz 左右，pump 光和 probe 光的夹角和铷泡温度没有变。从图中可以看出，虽然有额外噪声的引入但是因为选择合适的参量，额外噪声并没有明显地影响系统的压缩，这一实验结果验证了我们的前面的理论分析在最大压缩时，probe 光的损耗为 16%，conjugate 光的损耗为 5%，电子衰减器的数值为 0.5dB，这些参量基本与理论相吻合。

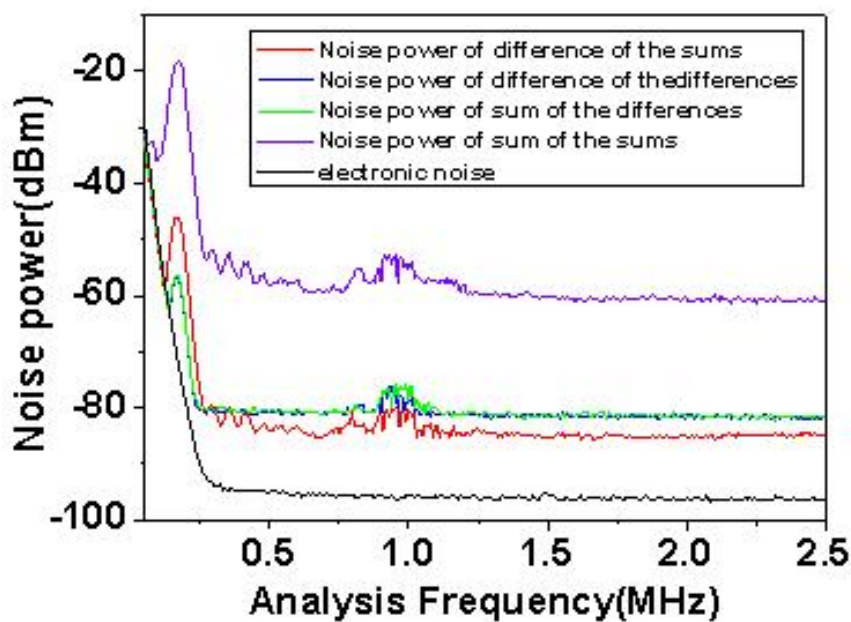


图 1.21 额外噪声引入时 FWM 压缩测量

## 1. 4 本章小结

在本章中，我们首先利用双边 Feymann 图解分析了 FWM 过程，物理图像清晰，而且计算过程简便。接下来，理论分析和实验测量了 FWM 的增益过程。并且理论分析了利用两对自零拍探测系统测量 FWM 相对强度差压缩，并且发现在某些参量条件下 FWM 过程对额外噪声不敏感，实验上，产生了明亮的纠缠光，通过优化各参量，得到了最大 4.1dB 的强度差压缩。并且通过将额外噪声引入到 probe 光，选择合适的实验参量，测量得到最大 3.7dB 的压缩，验证了我们的理论分析。利用四波混频产生明亮纠缠光束及其相关的这些基础性的工作，为我们以后利用 FWM 进行量子信息过程等相关方面的研究做准备。

## 第一章 参 考 文 献

- [1.1] D. F. Walls. Squeezed states of light. *Nature*, 1983, 306, 141.
- [1.2] J. R. Klauder. Continuous representation theory. *J. Math. Phys.*, 1963, 4, 1058.
- [1.3] H. P. Yuen. Two-photon coherent states of the radiation field. *Phys. Rev. A*, 1976, 13, 1226.
- [1.4] H. Haug. Quantum-Mechanical Rate Equations for Semiconductor Lasers. *Phys. Rev.* 1969, 184, 338.
- [1.5] D. Stoler. Equivalence classes of minimum uncertainty packets. *Phys. Rev. D*, 1970, 1, 3217.
- D. Stoler. Equivalence Classes of Minimum-Uncertainty Packets II. *Phys. Rev. D*, 1971, 4, 1925.
- [1.6] R. E. Slusher, L. W. Hollberg, B. Yurke, J. C. Mertz and J. F. Valley. Observation of Squeezed States Generated by Four-Wave Mixing in an Optical Cavity. *Phys. Rev. Lett.*, 1985, 55, 2409.
- [1.7] L. A. Wu, H. J. Kimble, J. L. Hall and H. F. Wu. Generation of Squeezed States by Parametric Down Conversion. *Phys. Rev. Lett.*, 1986, 57, 2520.
- [1.8] S. Machida and Y. Yamamoto. Observation of amplitude squeezing in a constant-current-driven semiconductor laser. *Phys. Rev. Lett.*, 1987, 58, 1000.
- [1.9] T. C. Zhang, J. P. Poizat, P. Grelu, J. F. Roch, P. Grangier, F. Marin, A. Bramati, V. Jost, M. D. Levenson and E. Giacobino. Quantum noise of free-running and externally-stabilized laser diodes. *Quantum Semiclass. Opt.*, 1995, 7, 601.
- [1.10] S. Reynaud. Generation of Twin Photon Beams by a Nondegenerate Optical Parametric Oscillator. *Europhys. Lett.*, 1987, 4, 427.
- [1.11] J. Mertz, T. Debuisschert, A. Heidmann, C. Fabre and E. Giacobino. Improvements in the observed intensity correlation of optical parametric oscillator twin beams. *Opt. Lett.*, 1991, 16, 1234.
- [1.12] J. R. Gao, F. Y. Cui, C. Y. Xue, C. D. Xie, and K. C. Peng. Generation and application of twin beams from an optical parametric oscillator including an  $\alpha$ -cut KTP crystal. *Opt. Lett.*, 1998, 23, 870.
- [1.13] C. Liu, J. Jing, Z. Zhou, R. C. Pooser, F. Hudelist, L. Zhou and W. Zhang. Realization of low frequency and controllable bandwidth squeezing based on a

- four-wave-mixing amplifier in rubidium vapor. *Opt. Lett.*, 2011, 36, 2979.
- [1.14] A. Eckstein, A. Christ, P. J. Mosley and C. Silberhorn. Highly Efficient Single-Pass Source of Pulsed Single-Mode Twin Beams of Light. *Phys. Rev. Lett.*, 2011, 106, 013603.
- [1.15] L. A. Lugiato, A. Gatti and E. Brambilla. Quantum imaging. *Journal of Physics B*, 2002, 4, s176.
- [1.16] C. Schwob, P. F. Cohadon, C. Fabre, M. A. M. Marte, H. Ritsch, A. Gatti and L. Lugiato. Transverse effects and mode couplings in OPOS. *Appl. Phys. B.*, 66, 685.
- [1.17] C. F. McCormick, V. Boyer, E. Arimodo and P. D. Lett. Strong relative intensity squeezing by 4-wave mixing in Rb vapor. *Opt. Lett.* 2007, 32, 178.
- [1.18] C. F. McCormick, A. M. Marino, V. Boyer and P. D. Lett. Strong low frequency quantum correlations from a four-wave-mixing amplifier. *Phys. Rev. A*, 2008, 78, 043816.
- [1.19] V. Boyer, A. M. Marino, R. C. Pooser and P. D. Lett. Entangled images from four-wave-mixing. *Science*, 2008, 321, 544.
- [1.20] Y. R. Shen. *The principle of nonlinear optics* (John Wiley & Sons, New York). 1984.
- [1.21] Robert W Boyd. *Nonlinear optics*. Academic Press. 2003.
- [1.22] B. Lounis and C. Cohen-Tannoudji. Coherent population trapping and Fano profiles. *J. Phys. II (Paris)* 1992, 2, 579
- [1.23] D. Grischkowsky, *Self-Focusing of Light by Potassium Vapor*, *Phys. Rev. Lett.*, 1970, 24, 866.
- [1.24] Vincent Wong, Robert W. Boyd, C. R. Stroud, Ryan S. Bennink, David L. Aronstein, and Q-Han Park, Honeycomb Pattern Formation by Laser-Beam Filamentation in Atomic Sodium Vapor, *Phys. Rev. Lett.*, 2002, 88, 113901.
- [1.25] 郭璐, 卫栋, 陈海霞, 熊德智, 王鹏军, 张靖. 铷原子热蒸气中强非线性效应产生激光模式图样的实验研究, *物理学报*, 2008, 57, 4224.
- [1.26] J. Zhang, T. Zhang, K. Zhang, C. Xie, and K. Peng, Quantum self-homodyne tomography with an empty cavity *J. Opt. Soc. Am. B.* 2000, 17, 1920.
- [1.27] A. Zavatta, S. Viciani, G. Giacomelli, and F. Marin. Quantum-state reconstruction of a squeezed laser field by self-homodyne tomography. *Phys. Rev. A*, 2002, 66, 043805.
- [1.28] H. P. Yuen and J. H. Shapiro. Generation and detection of two-photon coherent states in degenerate four-wave mixing. *Opt. Lett.*, 1979, 4, 344.
- [1.29] M. D. Reid and D. F. Walls. Generation of squeezed states via degenerate four-wave mixing. *Phys. Rev. A*, 1985, 31, 1622.
- [1.30] M. Jasperse, L. D. Turner and R. E. Scholten. Relative intensity squeezing by

four-wave mixing with loss: an analytic model and experimental diagnostic. *Opt. Express*, 2011, 19, 3765.

[1.31] R.C. Pooser, A. M. Marino, V. Boyer, K. M. Jones and P. D. Lett. Quantum correlated light beams from non-degenerate four-wave-mixing in an atomic vapor: the D1 and D2 lines of the  $^{85}\text{Rb}$  and  $^{87}\text{Rb}$ . *Opt. Express*. 2009, 17, 16722.

## 第二章 内腔非线性过程-多共振腔

### 2. 1 引言

四波混频在现代光学技术中有着广泛的应用，如通过四波混频实现光波长转换<sup>[2.1-2.5]</sup>，实时全息成像<sup>[2.6,2.7]</sup>，慢光<sup>[2.8]</sup>，压缩态光场的产生<sup>[2.9,2.10,2.11]</sup>和量子信息过程<sup>[2.12,2.13]</sup>，以及瞬态相位共轭<sup>[2.14]</sup>等，这使其成为现代光学的研究热点之一。尤其将热原子作为增益介质，实验装置大为简化，系统的操作变得简便。但是对于热原子或 pump 光远失谐时，需要 pump 光的功率较高，一些实验则需要脉冲光<sup>[2.15]</sup>，这对实验研究产生了一些障碍。在近共振和 pump 功率较低条件下，实现较高的转化效率通常的办法是：一、利用相干增强非线性过程，Harris 与其合作者证明了 EIT 是提高非线性光学频率转化效率的主要因素<sup>[2.16]</sup>，Hemmer 则研究了基于 EIT 的双  $\Lambda$  型结构的四波混频<sup>[2.17]</sup>，通过相干增强实现了在较低功率下较高的转化效率；二、腔增四波混频过程，利用谐振腔的增强作用可以将转化阈值降低十的八次方数量级<sup>[2.18]</sup>，转化效率可以最大达到 50%<sup>[2.19]</sup>，而在加入 Raman 活跃介质后，转化效率可以提高到 60%<sup>[2.20]</sup>，另外肖敏小组采用环形腔结构，证明了内腔四波混频过程产生的明亮孪生光束之间具有很强的关联特性<sup>[2.21]</sup>，这使内腔四波混频过程在量子信息过程中也具有潜在的应用价值。

本章主要介绍通过腔增强四波混频过程产生 Raman 光，并利用三能级原子的双光子跃迁产生大的色散，实现腔内三共振的相关理论和实验。

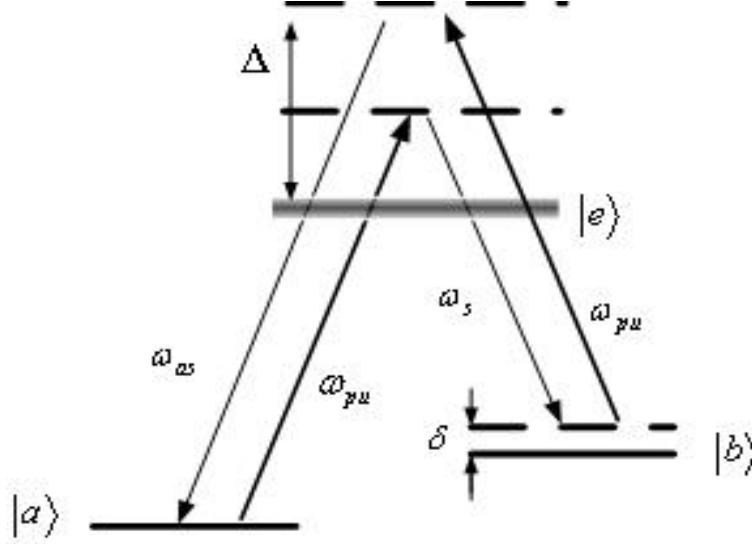
### 2. 2 相关非线性过程的理论计算

在本章中，将结合我们的实验进行理论分析。假设  $\Lambda$  型的三能级原子介质，激发态为  $|e\rangle$ ， $|a\rangle$  和  $|b\rangle$  分别为两个基态，与一束强的 pump 光和较弱的 Stokes 光与 anti-Stokes 光作用，单光子失谐为  $\Delta$ ，双光子失谐为  $\delta$ ，如图 2.1 所示。该系统的 Hamiltonian 可写为：

$$\begin{aligned}\hat{H}_0 &= \hbar\omega_a |a\rangle\langle a| + \hbar\omega_b |b\rangle\langle b| + \hbar\omega_e |e\rangle\langle e| \\ \hat{H}_I &= -\frac{1}{2}\mu_{ae}A_{pu}\exp(-i\omega_{pu}t)|e\rangle\langle a| - \frac{1}{2}\mu_{ae}A_{as}\exp(-i\omega_{as}t)|e\rangle\langle a| \\ &\quad - \frac{1}{2}\mu_{ae}A_{pu}^*\exp(i\omega_{pu}t)|a\rangle\langle e| - \frac{1}{2}\mu_{ae}A_{as}^*\exp(i\omega_{as}t)|a\rangle\langle e|\end{aligned}\quad (2.1)$$



$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{2}\mu_{be}A_{pu}\exp(-i\omega_{pu}t)|e\rangle\langle b| - \frac{1}{2}\mu_{be}A_s\exp(-i\omega_s t)|e\rangle\langle b| \\
 & -\frac{1}{2}\mu_{be}A_{pu}^*\exp(i\omega_{pu}t)|b\rangle\langle e| - \frac{1}{2}\mu_{be}A_s^*\exp(i\omega_s t)|b\rangle\langle e|
 \end{aligned} \tag{2.2}$$


 图 2.1  $\Lambda$  型三能级结构图

其中  $\mu_{ae}$  和  $\mu_{be}$  为  $|a\rangle-|e\rangle$  和  $|b\rangle-|e\rangle$  的跃迁偶极矩,  $A_{pu}$ 、 $A_s$ 、 $A_{as}$  分别为三个光场的电场强度,  $\omega_{pu}$ 、 $\omega_s$ 、 $\omega_{as}$  分别为三个光场的频率。

我们利用几率波函数求解系统的 Hamiltonian, 假设系统的波函数为三个态的叠加态:

$$\psi(t) = c_a \exp(-i\omega_a t)|a\rangle + c_b \exp(-i\delta t) \exp(-i\omega_b t)|b\rangle + c_e \exp(-i\omega_e t)|e\rangle \tag{2.3}$$

由 Schrodinger 方程可得:

$$\dot{c}_a = \frac{i}{2\hbar} \mu_{ae} A_{pu}^* \exp[i(\omega_{pu} - \omega_{ea})t] c_e + \frac{i}{2\hbar} \mu_{ae} A_{as}^* \exp[i(\omega_{as} - \omega_{ea})t] c_e \tag{2.4.a}$$

$$\begin{aligned}
 \dot{c}_b = & -i\delta c_b + \frac{i}{2\hbar} \mu_{be} A_{pu}^* \exp[i(\omega_{pu} - \omega_{eb} + \delta)t] c_e \\
 & + \frac{i}{2\hbar} \mu_{be} A_s^* \exp[i(\omega_s - \omega_{eb} + \delta)t] c_e
 \end{aligned} \tag{2.4.b}$$

$$\begin{aligned}
 \dot{c}_e = & \frac{i}{2\hbar} \mu_{ae} A_{pu} \exp[-i(\omega_{pu} - \omega_{ea})t] c_a + \frac{i}{2\hbar} \mu_{ae} A_{as} \exp[-i(\omega_{as} - \omega_{ea})t] c_a \\
 & + \frac{i}{2\hbar} \mu_{be} A_{pu} \exp[-i(\omega_{pu} - \omega_{eb} + \delta)t] c_b + \frac{i}{2\hbar} \mu_{be} A_s \exp[-i(\omega_s - \omega_{eb} + \delta)t] c_b
 \end{aligned} \tag{2.4.c}$$

在较大失谐条件下, 我们假设原子在激发态布局数很小, 且处于稳态, 对上式 2.4.c 式积分:

$$\begin{aligned}
\dot{c}_e = & \frac{i}{2\hbar} \int_{-\infty}^t \{ \mu_{ae} A_{pu} \exp[-i(\omega_{pu} - \omega_{ea})t'] c_a \\
& + \mu_{ae} A_{as} \exp[-i(\omega_{as} - \omega_{ea})t'] c_a \\
& + \mu_{be} A_{pu} \exp[-i(\omega_{pu} - \omega_{eb} + \delta)t'] c_b \\
& + \mu_{be} A_s \exp[-i(\omega_s - \omega_{eb} + \delta)t'] c_b \} dt'
\end{aligned} \tag{2.5}$$

积分可得:

$$\begin{aligned}
c_e = & \frac{-\mu_{ae} A_{pu} \exp[-i(\omega_{pu} - \omega_{ea})t]}{2\hbar(\omega_{pu} - \omega_{ea})} c_a + \frac{-\mu_{ae} A_{as} \exp[-i(\omega_{as} - \omega_{ea})t]}{2\hbar(\omega_{as} - \omega_{ea})} c_a \\
& + \frac{-\mu_{be} A_{pu} \exp[-i(\omega_{pu} - \omega_{eb} + \delta)t]}{2\hbar(\omega_{pu} - \omega_{eb} + \delta)} c_b + \frac{-\mu_{be} A_s \exp[-i(\omega_s - \omega_{eb} + \delta)t]}{2\hbar(\omega_s - \omega_{eb} + \delta)} c_b
\end{aligned} \tag{2.6}$$

将 2.6 式代入 2.4. a 和 2.4. b 式, 在双光子失谐非常小的条件下可得:

$$\begin{aligned}
\dot{c}_a = & \frac{-i\mu_{ae} A_{pu} \mu_{ae} A_{pu}^*}{(2\hbar)^2(\omega_{pu} - \omega_{ea})} c_a + \frac{-i\mu_{ae} A_{as} \mu_{ae} A_{pu}^* \exp[i(\omega_{pu} - \omega_{as})t]}{(2\hbar)^2(\omega_{as1} - \omega_{ea})} c_a \\
& + \frac{-i\mu_{be} A_{pu} \mu_{ae} A_{pu}^* \exp(-i\omega_{ba}t)}{(2\hbar)^2(\omega_{pu} - \omega_{eb})} c_b + \frac{-i\mu_{be} A_s \mu_{ae} A_{pu}^*}{(2\hbar)^2(\omega_s - \omega_{eb})} c_b \\
& + \frac{-i\mu_{ae} A_{pu} \mu_{ae} A_{as}^* \exp[i(\omega_{as1} - \omega_{pu})t]}{(2\hbar)^2(\omega_{pu} - \omega_{ea})} c_a + \frac{-i\mu_{ae} A_{as} \mu_{ae} A_{as}^*}{(2\hbar)^2(\omega_{as} - \omega_{ea})} c_a \\
& + \frac{-i\mu_{be} A_{pu} \mu_{ae} A_{as}^*}{(2\hbar)^2(\omega_{pu} - \omega_{eb})} c_b + \frac{-i\mu_{be} A_s \mu_{ae} A_{as}^* \exp(i\omega_{ba}t)}{2\hbar(\omega_s - \omega_{eb})} c_b
\end{aligned} \tag{2.7.a}$$

$$\begin{aligned}
\dot{c}_b = & -i\delta c_b + \frac{-i\mu_{ae} A_{pu} \mu_{be} A_{pu}^* \exp[i(\omega_{ba} + \delta)t]}{(2\hbar)^2(\omega_{pu} - \omega_{ea})} c_a \\
& + \frac{-i\mu_{ae} A_{as} \mu_{be} A_{pu}^*}{(2\hbar)^2(\omega_{as} - \omega_{ea})} c_a \\
& + \frac{-i\mu_{be} A_{pu} \mu_{be} A_{pu}^*}{(2\hbar)^2(\omega_{pu} - \omega_{eb})} c_b \\
& + \frac{-i\mu_{be} A_s \mu_{be} A_{pu}^* \exp[i(\omega_{pu} - \omega_s)t]}{(2\hbar)^2(\omega_s - \omega_{eb})} c_b \\
& + \frac{-i\mu_{ae} A_{pu} \mu_{be} A_s^*}{(2\hbar)^2(\omega_{pu} - \omega_{ea})} c_a + \frac{-i\mu_{ae} A_{as} \mu_{be} A_s^* \exp(-i\omega_{ba}t)}{(2\hbar)^2(\omega_{as} - \omega_{ea})} c_a \\
& + \frac{-i\mu_{be} A_{pu} \mu_{be} A_s^* \exp(-i\omega_{ba}t)}{(2\hbar)^2(\omega_{pu} - \omega_{eb})} c_b + \frac{-i\mu_{be} A_s \mu_{be} A_s^*}{(2\hbar)^2(\omega_s - \omega_{eb})} c_b
\end{aligned} \tag{2.7.b}$$

通过绝热近似, 将上式中的快变量去掉, 可得:

$$\begin{aligned} \dot{c}_a = & \frac{-i}{(2\hbar)^2} \left[ \frac{\mu_{ae} A_{pu} \mu_{ae} A_{pu}^*}{\omega_{pu} - \omega_{ea}} + \frac{\mu_{ae} A_{as} \mu_{ae} A_{as}^*}{\omega_{as} - \omega_{ea}} \right] c_a \\ & + \frac{-i}{(2\hbar)^2} \left[ \frac{\mu_{be} A_{pu} \mu_{ae} A_{as}^*}{\omega_{pu} - \omega_{eb}} + \frac{\mu_{be} A_s \mu_{ae} A_{pu}^*}{\omega_s - \omega_{eb}} \right] c_b \end{aligned} \quad (2.8.a)$$

$$\begin{aligned} \dot{c}_b = & -i\delta c_b + \frac{-i}{(2\hbar)^2} \left[ \frac{\mu_{ae} A_{as} \mu_{be} A_{pu}^*}{\omega_{as} - \omega_{ea}} + \frac{\mu_{ae} A_{pu} \mu_{be} A_s^*}{\omega_{pu} - \omega_{ea}} \right] c_a \\ & + \frac{-i}{(2\hbar)^2} \left[ \frac{\mu_{be} A_{pu} \mu_{be} A_{pu}^*}{\omega_{pu} - \omega_{eb}} + \frac{\mu_{be} A_s \mu_{be} A_s^*}{\omega_s - \omega_{eb}} \right] c_b \end{aligned} \quad (2.8.b)$$

如果定义：

$$\Omega_{aa} = \frac{1}{(2\hbar)^2} \left( \frac{\mu_{ae} A_{pu} \mu_{ae} A_{pu}^*}{\omega_{pu} - \omega_{ea}} + \frac{\mu_{ae} A_{as} \mu_{ae} A_{as}^*}{\omega_{as} - \omega_{ea}} \right) \quad (2.9.a)$$

$$\Omega_{ab} = \frac{1}{(2\hbar)^2} \left( \frac{\mu_{be} A_{pu} \mu_{ae} A_{as}^*}{\omega_{pu} - \omega_{eb}} + \frac{\mu_{be} A_s \mu_{ae} A_{pu}^*}{\omega_s - \omega_{eb}} \right) \quad (2.9.b)$$

$$\Omega_{ba} = \frac{1}{(2\hbar)^2} \left( \frac{\mu_{ae} A_{as} \mu_{be} A_{pu}^*}{\omega_{as} - \omega_{ea}} + \frac{\mu_{ae} A_{pu} \mu_{be} A_s^*}{\omega_{pu} - \omega_{ea}} \right) \quad (2.9.c)$$

$$\Omega_{bb} = \frac{1}{(2\hbar)^2} \left( \frac{\mu_{be} A_{pu} \mu_{be} A_{pu}^*}{\omega_{pu} - \omega_{eb}} + \frac{\mu_{be} A_s \mu_{be} A_s^*}{\omega_s - \omega_{eb}} \right) \quad (2.9.d)$$

上式中  $\Omega_{aa}$  和  $\Omega_{bb}$  为 Stark 位移， $\Omega_{ab}$  为双光子 Rabi 频率。将 2.9 式代入 2.8 式：

$$\dot{c}_a = -i\Omega_{aa} c_a - i\Omega_{ab} c_b \quad (2.10.a)$$

$$\dot{c}_b = -i\delta c_b - i\Omega_{ba} c_a - i\Omega_{bb} c_b \quad (2.10.b)$$

如果对上式取复共轭得：

$$\dot{c}_a^* = i\Omega_{aa} c_a^* + i\Omega_{ab} c_b^* \quad (2.11.a)$$

$$\dot{c}_b^* = i\delta c_b^* + i\Omega_{ba} c_a^* + i\Omega_{bb} c_b^* \quad (2.11.b)$$

在这里我们将  $|a\rangle$  和  $|b\rangle$  等效为通常的二能级系统，“ $|a\rangle$  为对应的基态， $|b\rangle$  为对应的激发态，原子可从基态  $|a\rangle$  跃迁到激发态  $|b\rangle$ ”。并唯像的假设，由能级  $|a\rangle$  到  $|b\rangle$  跃迁的布局数衰减率为  $\Gamma_{ba}$ ，退相速率为  $\gamma_{ba}$ 。由 (2.10.a)  $\cdot c_a^* + c_a \cdot$  (2.11.a)、(2.10.b)  $\cdot c_b^* + c_b \cdot$  (2.11.b) 和 (2.10.a)  $\cdot c_b^* + c_b \cdot$  (2.11.b)，可以得到该二能级系统的密度矩阵的运动方程：

$$\dot{\rho}_{aa} = -i(\Omega_{ab}\rho_{ba} - \Omega_{ba}\rho_{ab}) + \Gamma_{ba}\rho_{bb} \quad (2.12.a)$$

$$\dot{\rho}_{bb} = -i(\Omega_{ab}\rho_{ba} - \Omega_{ba}\rho_{ab}) - \Gamma_{ba}\rho_{bb} \quad (2.12.b)$$

$$\dot{\rho}_{ab} = -(\gamma_{ba} - i\delta)\rho_{ab} + i\rho_{ab}(\Omega_{bb} - \Omega_{aa}) + i\Omega_{ab}(\rho_{aa} - \rho_{bb}) \quad (2.12.c)$$

其中  $\rho_{aa} = c_a c_a^*$ 、 $\rho_{bb} = c_b c_b^*$ 、 $\rho_{ab} = c_a c_b^*$ ， $\rho_{ab} = \rho_{ba}^*$  为对应的慢变量。对比一般二能级系统的密度矩阵的运动方程，很容易看出 2.12 式与一般二能级系统的密度矩阵的运动方程非常相似，这种处理方法极大地简化了计算，使原来复杂的问题变得直观、清晰，而且可以很方便的将有关二能级的计算方法应用到我们的计算过程当中。在稳态条件下，可以求得两能级间的布局数差和跃迁矩阵元为：

$$\rho_{bb} - \rho_{aa} = \frac{(\rho_{bb} - \rho_{aa})^{eq} [1 + (\frac{\delta}{\gamma_{ab}})^2]}{1 + (\frac{\delta}{\gamma_{ab}})^2 + 4 \frac{|\Omega_{ab}|^2}{\Gamma_{ba}\gamma_{ba}}} \quad (2.13.a)$$

$$\rho_{ab} = \frac{\frac{\Omega_{ab}}{\gamma_{ba}}}{(\frac{\Omega_{aa}}{\gamma_{ba}} - \frac{\Omega_{bb}}{\gamma_{ba}} + \frac{\delta}{\gamma_{ba}}) + i} \frac{(\rho_{bb} - \rho_{aa})^{eq} [1 + (\frac{\delta}{\gamma_{ab}})^2]}{1 + (\frac{\delta}{\gamma_{ab}})^2 + 4 \frac{|\Omega_{ab}|^2}{\Gamma_{ba}\gamma_{ba}}} \quad (2.13.b)$$

以上的处理将有助于我们以后的计算。下面我们分析该三能级原子系统。由 2.6 式可得诱导矩阵元  $\rho_{ae}$  和  $\rho_{be}$  的表达式为：

$$\begin{aligned} \rho_{ae} &= c_a c_e^* \\ &= \frac{-\mu_{ae} A_{pu}^* \exp[i(\omega_{pu} - \omega_{ea})t]}{2\hbar(\omega_{pu} - \omega_{ea})} \rho_{aa} + \frac{-\mu_{ae} A_{as}^* \exp[i(\omega_{as} - \omega_{ea})t]}{2\hbar(\omega_{as} - \omega_{ea})} \rho_{aa} \\ &+ \frac{-\mu_{be} A_{pu}^* \exp[i(\omega_{pu} - \omega_{eb})t]}{2\hbar(\omega_{pu} - \omega_{eb})} \rho_{ab} + \frac{-\mu_{be} A_s^* \exp[i(\omega_s - \omega_{eb})t]}{2\hbar(\omega_s - \omega_{eb})} \rho_{ab} \end{aligned} \quad (2.14.a)$$

$$\begin{aligned} \rho_{be} &= c_b c_e^* \\ &= \frac{-\mu_{ae} A_{pu}^* \exp[i(\omega_{pu} - \omega_{ea})t]}{2\hbar(\omega_{pu} - \omega_{ea})} \rho_{ba} + \frac{-\mu_{ae} A_{as}^* \exp[i(\omega_{as} - \omega_{ea})t]}{2\hbar(\omega_{as} - \omega_{ea})} \rho_{ba} \\ &+ \frac{-\mu_{be} A_{pu}^* \exp[i(\omega_{pu} - \omega_{eb})t]}{2\hbar(\omega_{pu} - \omega_{eb})} \rho_{bb} + \frac{-\mu_{be} A_s^* \exp[i(\omega_s - \omega_{eb})t]}{2\hbar(\omega_s - \omega_{eb})} \rho_{bb} \end{aligned} \quad (2.14.b)$$

以上的计算过程中，我们利用绝热近似和等效二能级原子方法计算得到了四波混频过程中三能级原子的密度矩阵元。下面我们利用这些量来计算电极化强度。根据电极化强度的定义式：

$$\tilde{P} = N_a \text{tr}(\tilde{\rho}\mu) = N_a (\tilde{\rho}_{ae}\mu_{ea} + \tilde{\rho}_{ea}\mu_{ae} + \tilde{\rho}_{eb}\mu_{be} + \tilde{\rho}_{be}\mu_{eb}) \quad (2.15)$$

其中  $\tilde{\rho}_{ae} = \tilde{\rho}_{ea}^* = \rho_{ae} \exp(i\omega_{ea}t)$ 、 $\tilde{\rho}_{be} = \tilde{\rho}_{eb}^* = \rho_{be} \exp(i\omega_{eb}t)$  为快变量。

将 2.14 式代入上式中可得：

$$\begin{aligned}
 \tilde{\rho} = & \frac{-\mu_{ae}\mu_{ea}A_{pu} \exp(-i\omega_{pu}t)}{2\hbar(\omega_{pu} - \omega_{ea})} \rho_{aa} + \frac{-\mu_{ae}\mu_{ea}A_{as} \exp(-i\omega_{as}t)}{2\hbar(\omega_{as} - \omega_{ea})} \rho_{aa} \\
 & + \frac{-\mu_{be}\mu_{eb}A_{pu} \exp(-i\omega_{as}t)}{2\hbar(\omega_{pu} - \omega_{eb})} \rho_{ab} + \frac{-\mu_{be}\mu_{eb}A_s \exp(-i\omega_{pu}t)}{2\hbar(\omega_s - \omega_{eb})} \rho_{ab} \\
 & + \frac{-\mu_{ae}\mu_{ea}A_{pu}^* \exp(i\omega_{pu}t)}{2\hbar(\omega_{pu} - \omega_{ea})} \rho_{aa} + \frac{-\mu_{ae}\mu_{ea}A_{as}^* \exp(i\omega_{as}t)}{2\hbar(\omega_{as} - \omega_{ea})} \rho_{aa} \\
 & + \frac{-\mu_{be}\mu_{eb}A_{pu}^* \exp(i\omega_{as}t)}{2\hbar(\omega_{pu} - \omega_{eb})} \rho_{ba} + \frac{-\mu_{be}\mu_{eb}A_s^* \exp(i\omega_{pu}t)}{2\hbar(\omega_s - \omega_{eb})} \rho_{ba} \\
 & + \frac{-\mu_{ae}\mu_{eb}A_{pu} \exp(-i\omega_s t)}{2\hbar(\omega_{pu} - \omega_{ea})} \rho_{ba} + \frac{-\mu_{ae}\mu_{eb}A_{as} \exp(-i\omega_{pu}t)}{2\hbar(\omega_{as} - \omega_{ea})} \rho_{ba} \\
 & + \frac{-\mu_{be}\mu_{eb}A_{pu} \exp(-i\omega_{pu}t)}{2\hbar(\omega_{pu} - \omega_{eb})} \rho_{bb} + \frac{-\mu_{be}\mu_{eb}A_s \exp(-i\omega_s t)}{2\hbar(\omega_s - \omega_{eb})} \rho_{bb} \\
 & + \frac{-\mu_{ae}\mu_{eb}A_{pu}^* \exp(i\omega_s t)}{2\hbar(\omega_{pu} - \omega_{ea})} \rho_{ab} + \frac{-\mu_{ae}\mu_{eb}A_{as}^* \exp(i\omega_{pu}t)}{2\hbar(\omega_{as} - \omega_{ea})} \rho_{ab} \\
 & + \frac{-\mu_{be}\mu_{eb}A_{pu}^* \exp(i\omega_{pu}t)}{2\hbar(\omega_{pu} - \omega_{eb})} \rho_{bb} + \frac{-\mu_{be}\mu_{eb}A_s^* \exp(i\omega_s t)}{2\hbar(\omega_s - \omega_{eb})} \rho_{bb}
 \end{aligned} \tag{2.16}$$

从上式中分离出各光场对应的电极化强度为：

$$\begin{aligned}
 \tilde{P}_{pu}(r, t) = & \left[ \frac{-\mu_{ae}\mu_{ea}A_{pu}}{2\hbar(\omega_{pu} - \omega_{ea})} \rho_{aa} + \frac{-\mu_{be}\mu_{eb}A_{pu}}{2\hbar(\omega_{pu} - \omega_{eb})} \rho_{bb} \right. \\
 & \left. + \frac{-\mu_{ae}\mu_{eb}A_{as}}{2\hbar(\omega_{as} - \omega_{ea})} \rho_{ab} + \frac{-\mu_{be}\mu_{eb}A_s}{2\hbar(\omega_s - \omega_{eb})} \rho_{ba} \right] \exp(-i\omega_{pu}t) + c.c.
 \end{aligned} \tag{2.17.a}$$

$$\tilde{P}_{as}(r, t) = \left[ \frac{-\mu_{ae}\mu_{ea}A_{as}}{2\hbar(\omega_{as} - \omega_{ea})} \rho_{aa} + \frac{-\mu_{be}\mu_{eb}A_{pu}}{2\hbar(\omega_{pu} - \omega_{eb})} \rho_{ba} \right] \exp(-i\omega_{as}t) + c.c. \tag{2.17.b}$$

$$\tilde{P}_s(r, t) = \left[ \frac{-\mu_{be}\mu_{eb}A_s}{2\hbar(\omega_s - \omega_{eb})} \rho_{bb} + \frac{-\mu_{ae}\mu_{eb}A_{pu}}{2\hbar(\omega_{pu} - \omega_{ea})} \rho_{ab} \right] \exp(-i\omega_s t) + c.c. \tag{2.17.c}$$

### 2. 3 内腔四波混频的基本理论

在本小节中我们将分析在内腔中的四波混频过程。如果将  $\Lambda$  型的三能级原子介质放入光学谐振腔内，一束强的 pump 注入腔内，如果振荡条件得以满足，会产生四波混频乃至高阶四波混频过程，在腔内形成多共振。考虑一阶四波混频过程，即三

共振时的情况, pump 光和由四波混频过程所产生的 Stokes 光和 anti-Stokes 同时存在, 则内腔场的 Maxwell 方程由第一章的 1.33 式可得:

$$\mu\epsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} E_i + \mu\sigma \frac{\partial}{\partial t} E_i - \nabla^2 E_i = -\mu \frac{\partial^2}{\partial t^2} P_i + \eta \frac{\partial}{\partial t} E_{ei} \quad (2.18)$$

其中,  $E_i$  为各内腔光场的电场强度,  $P_i$  为各光场对应的电极化强度,  $E_{ei}$  为从腔外耦合入腔内的光场,  $\eta$  为外场的耦合效率。各内腔光场可以写为:

$$E_{pu}(r, t) = \frac{1}{2} A_{pu}(r, t) \exp(-i\omega_{pu}t) + c.c. \quad (2.19.a)$$

$$E_{as1}(r, t) = \frac{1}{2} A_{as}(r, t) \exp(-i\omega_{as}t) + c.c. \quad (2.19.b)$$

$$E_{s1}(r, t) = \frac{1}{2} A_s(r, t) \exp(-i\omega_s t) + c.c. \quad (2.19.c)$$

其中  $A_{pu}$ 、 $A_{as}$ 、 $A_s$  分别是 pump 光、anti-Stokes 光和 Stokes 光的慢变振幅,  $\omega_{pu}$ 、 $\omega_{as}$  和  $\omega_s$  为这三个光场对应的频率。腔内总光场可以写为  $E(r, t) = \frac{1}{2} \sum_i E_i(r, t) + c.c.$ 。从

腔外注入的光场只有 pump 光, 其表达式写为:

$$E_{epu}(r, t) = \frac{1}{2} A_{epu}(r, t) \exp(-i\omega_{pu}t) + c.c. \quad (2.20)$$

由 2.17 式可知, 在各内腔场的作用下, 介质的极化强度可分别表示为:

$$\tilde{P}_{pu}(r, t) = \frac{1}{2} P_{pu}(r, t) \exp(-i\omega_{pu}t) + c.c. \quad (2.21.a)$$

$$\tilde{P}_{as}(r, t) = \frac{1}{2} P_{as}(r, t) \exp(-i\omega_{as}t) + c.c. \quad (2.21.b)$$

$$\tilde{P}_s(r, t) = \frac{1}{2} P_s(r, t) \exp(-i\omega_s t) + c.c. \quad (2.21.c)$$

其中  $P_{pu}$ 、 $P_{as}$  和  $P_s$  为电极化率的慢变量。将 2.19 式、2.20 式和 2.21 式代入 2.18 式, 并利用慢变近似可得:

$$\frac{d}{dt} A_{pu}(t) + \left[ \frac{\gamma_{Rpu}}{2} - i(\omega_{pu} - \omega_{cpu}) \right] A_{pu}(t) = i \frac{\omega_{pu}}{2\epsilon_0} \frac{1}{V_{pu}} \int P_{pu}(r, t) dV + \frac{\gamma_{Tpu}}{2} A_{epu}(t) \quad (2.22.a)$$

$$\frac{d}{dt} A_{as}(t) + \left[ \frac{\gamma_{Ras}}{2} - i(\omega_{as} - \omega_{cas}) \right] A_{as}(t) = i \frac{\omega_{as}}{2\epsilon_0} \frac{1}{V_{as}} \int P_{as}(r, t) dV \quad (2.22.b)$$

$$\frac{d}{dt}A_s(t) + \left[ \frac{\gamma_{Rs}}{2} - i(\omega_s - \omega_{cs}) \right] A_s(t) = i \frac{\omega_s}{2\epsilon_0} \frac{1}{V_s} \int_V P_s(r,t) dV \quad (2.22.c)$$

上式中的等号右面的三个积分为电极化率对腔内模体积的积分，本文中我们只考虑 TEM<sub>00</sub> 模， $\omega_{cpu, cas, s}$  为 pump 光、anti-Stokes 光和 Stokes 光的对应冷腔的共振频率， $V_{pu, as, s}$  三束光的 TEM<sub>00</sub> 模的模体积，其他系数：

$$\gamma_{Rpu, as, s1} = - \frac{c}{n(A_{pu, as, s}, \omega_{pu, as, s})L} \ln(r_1 r_2) \quad (2.23.a)$$

$$\gamma_{Tpu, as, s} = \frac{\eta}{2} = \frac{2c}{n(A_{pu, as, s}, \omega_{pu, as, s})L} t_1 \quad (2.23.b)$$

上式中  $L$  为腔长， $r_1(t_1)$  和  $r_2(t_2)$  分别是腔的输入镜和输出镜对三束光的反射率（透射率），满足  $r_i^2 + t_i^2 = 1$  ( $i=1,2$ )。这里假设腔镜为宽带镀膜，对三束光的反射率和透射率及损耗相同， $n_{pu, as, s}$  为与三束光对应的折射率。

## 2. 4 内腔 FWM 过程

### 2. 4. 1 内腔受激 Raman 过程—双模共振腔

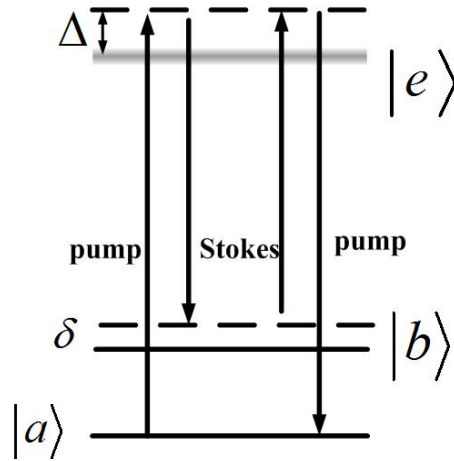


图 2.2 受激 Raman 过程能级图

在某些条件下，如介质的吸收很强或者共振条件不满足，anti-Stokes 光被抑制，无法在腔内振荡，因此腔内将只有 pump 光和 Stokes 光，即内腔受激 Raman 过程，如图 2.2 所示为受激 Raman 过程的能级图。此时对应的 2.9 式，受激 Raman 过程中的 Stark 位移和双光子 Rabi 频率为：

$$\Omega_{aa} = \frac{1}{(2\hbar)^2} \frac{\mu_{ae}^2 |A_{pu}|^2}{\omega_{pu} - \omega_{ea}} \quad (2.24a)$$

$$\Omega_{ab} = \frac{1}{(2\hbar)^2} \frac{\mu_{ae} \mu_{be} A_s A_{pu}^*}{\omega_s - \omega_{eb}} \quad (2.24b)$$

$$\Omega_{ba} = \frac{1}{(2\hbar)^2} \frac{\mu_{be} \mu_{ae} A_{pu} A_s^*}{\omega_{pu} - \omega_{ea}} \quad (2.24c)$$

$$\Omega_{bb} = \frac{1}{(2\hbar)^2} \left( \frac{\mu_{be}^2 |A_{pu}|^2}{\omega_{pu} - \omega_{eb}} + \frac{\mu_{be}^2 |A_s|^2}{\omega_s - \omega_{eb}} \right) \quad (2.24d)$$

所以等效二能级原子跃迁密度矩阵元表达式可化为：

$$\rho_{ab} = \frac{1}{(2\hbar)^2} \frac{-(\rho_{aa} - \rho_{bb})}{(\Omega_{bb} - \Omega_{aa} + \delta) + i\gamma_{ba}} \frac{\mu_{ae} \mu_{be}}{\omega_s - \omega_{eb}} A_s A_{pu}^* \quad (2.25)$$

其中：

$$\rho_{aa} - \rho_{bb} = \frac{(\rho_{aa} - \rho_{bb})^{eq} \Gamma_{ba} (\gamma_{ab}^2 + \delta^2)}{\Gamma_{ba} (\gamma_{ab}^2 + \delta^2) + 4|\Omega_{ab}|^2 \gamma_{ba}} \quad (2.26)$$

为等效二能级原子的布局数差或三能级原子的两基态间的粒子数差。在受激 Raman 过程中，电极化强度表达式由 2.17 式可得：

$$P_{pu}(r, t) = \frac{-\mu_{ae} \mu_{ea} A_{pu}}{2\hbar(\omega_{pu} - \omega_{ea})} \rho_{aa} + \frac{-\mu_{be} \mu_{eb} A_{pu}}{2\hbar(\omega_{pu} - \omega_{eb})} \rho_{bb} + \frac{-\mu_{be} \mu_{ea} A_s}{2\hbar(\omega_s - \omega_{eb})} \rho_{ba} \quad (2.27.a)$$

$$P_s(r, t) = \frac{-\mu_{be} \mu_{eb} A_s}{2\hbar(\omega_s - \omega_{eb})} \rho_{bb} + \frac{-\mu_{ae} \mu_{eb} A_{pu}}{2\hbar(\omega_{pu} - \omega_{ea})} \rho_{ab} \quad (2.27.b)$$

将 2.25 式代入 2.27 式可得：

$$P_{pu}(r, t) = \frac{-N_a \mu_{ae}^2}{\hbar(\omega_{pu} - \omega_{ea})} A_{pu}(r, t) + \frac{N_a (\rho_{aa} - \rho_{bb})}{(\Omega_{bb} - \Omega_{aa} + \delta) - i\gamma_{ba}} \frac{1}{(2\hbar)^2} \frac{\mu_{ae}^2 \mu_{be}^2}{\hbar(\omega_s - \omega_{eb})} \frac{1}{\omega_s - \omega_{eb}} |A_s|^2 A_{pu}(r, t) \quad (2.28.a)$$

$$P_s(r, t) = \frac{-N_a \mu_{be}^2}{\hbar(\omega_s - \omega_{eb})} A_s(r, t) + \frac{N_a (\rho_{aa} - \rho_{bb})}{(\Omega_{bb} - \Omega_{aa} + \delta) + i\gamma_{ba}} \frac{1}{(2\hbar)^2} \frac{\mu_{ae}^2 \mu_{be}^2}{\hbar(\omega_{pu} - \omega_{ea})} \frac{1}{\omega_s - \omega_{eb}} |A_{pu}|^2 A_s(r, t) \quad (2.28.b)$$

上两个表达式中，等号右面第一项为线性部分，第二项为非线性项。根据非线性过程的电极化强度表达式，可得受激 Raman 过程的 pump 光和 Stokes 光的对应的电极



化强度可写为:

$$P_{pu} = \varepsilon_0 \chi_{pu}^{(l)} A_{pu} - \varepsilon_0 \chi_{pu}^{(nl)} |A_s|^2 A_{pu} \quad (2.29.a)$$

$$P_s = \varepsilon_0 \chi_s^{(l)} A_s - \varepsilon_0 \chi_s^{(nl)} |A_{pu}|^2 A_s \quad (2.29.b)$$

所以 pump 光和 Stokes 光的电极化率的线性项和非线性项分别为:

$$\chi_{pu}^{(l)} = \frac{-N_a \mu_{ae}^2}{\varepsilon_0 \hbar (\omega_{pu} - \omega_{ea})} A_{pu}(r, t) \quad (2.30.a)$$

$$\chi_{pu}^{(nl)} = \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{N_a (\rho_{aa} - \rho_{bb})}{(\Omega_{bb} - \Omega_{aa} + \delta) - i\gamma_{ba}} \frac{1}{(2\hbar)^2} \frac{\mu_{ae}^2 \mu_{be}^2}{\hbar (\omega_s - \omega_{eb})} \frac{1}{\omega_s - \omega_{eb}} |A_s|^2 A_{pu}(r, t) \quad (2.30.b)$$

Stokes 光的电极化率的线性项和非线性项分别为:

$$\chi_s^{(l)} = \frac{-N_a \mu_{be}^2}{\varepsilon_0 \hbar (\omega_s - \omega_{eb})} A_s(r, t) \quad (2.31.a)$$

$$\chi_s^{(nl)} = \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{N_a (\rho_{aa} - \rho_{bb})}{(\Omega_{bb} - \Omega_{aa} + \delta) + i\gamma_{ba}} \frac{1}{(2\hbar)^2} \frac{\mu_{ae}^2 \mu_{be}^2}{\hbar (\omega_{pu} - \omega_{ea})} \frac{1}{\omega_s - \omega_{eb}} |A_{pu}|^2 A_s(r, t) \quad (2.31.b)$$

线性极化强度 2.30.a 式和 2.31.a 式对应线性折射率:

$$n_{pu} = \sqrt{1 + \chi_{pu}^l} = 1 + \frac{1}{2} \chi_{pu}^l = 1 + \frac{N_a \mu_{ae}^2}{\varepsilon_0} \frac{-1}{2\hbar (\omega_{pu} - \omega_{ea})} A_{pu} \quad (2.32.a)$$

$$n_s = \sqrt{1 + \chi_s^l} = 1 + \frac{1}{2} \chi_s^l = 1 + \frac{N_a \mu_{be}^2}{\varepsilon_0} \frac{-1}{2\hbar (\omega_s - \omega_{eb})} A_s \quad (2.32.b)$$

对于内腔 Raman 过程中, 由 2.22.a 和 2.22.d 式, 可得 pump 光和 Stokes 光的 Maxwell 方程为:

$$\frac{d}{dt} A_{pu}(t) + \left[ \frac{\gamma_{Rpu}}{2} - i(\omega_{pu} - \omega_{cpu}) \right] A_{pu}(t) = i \frac{\omega_{pu}}{2\varepsilon_0} \frac{1}{V_{pu}} \int P_{pu}(r, t) dV + \frac{\gamma_{Tpu}}{2} A_{epu}(t) \quad (2.33.a)$$

$$\frac{d}{dt} A_s(t) + \left[ \frac{\gamma_{Rs}}{2} - i(\omega_s - \omega_{cs}) \right] A_s(t) = i \frac{\omega_s}{2\varepsilon_0} \frac{1}{V_s} \int P_s(r, t) dV \quad (2.33.b)$$

将 2.28 式代入上式, 并利用 2.32 式, 可得:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} A_{pu}(t) + \left[ \frac{\gamma_{Rpu}}{2} - i(n_p \omega_{pu} - \omega_{cpu}) \right] A_{pu}(t) &= \frac{\gamma_{Tpu}}{2} A_{epu}(t) \\ + i \frac{\omega_{pu}}{2\varepsilon_0} \frac{N_a (\rho_{aa} - \rho_{bb})}{(\Omega_{bb} - \Omega_{aa} + \delta) - i\gamma_{ba}} \frac{1}{(2\hbar)^2} \frac{\mu_{ae}^2 \mu_{be}^2}{\hbar (\omega_s - \omega_{eb})} \frac{1}{\omega_s - \omega_{eb}} \\ &\times \frac{V_{pus}}{V_{pu}} |A_s(t)|^2 A_{pu}(t) \end{aligned} \quad (2.34.a)$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{d}{dt} A_s(t) + \left[ \frac{\gamma_{Rs}}{2} - i(n_s \omega_s - \omega_{cs}) \right] A_s(t) \\
 &= i \frac{\omega_s}{2\epsilon_0} \frac{N_a(\rho_{aa} - \rho_{bb})}{(\Omega_{bb} - \Omega_{aa} + \delta) + i\gamma_{ba}} \frac{1}{(2\hbar)^2} \frac{\mu_{ae}^2 \mu_{be}^2}{\hbar(\omega_{pu} - \omega_{ea})} \frac{1}{\omega_s - \omega_{eb}} \frac{V_{pus}}{V_s} |A_{pu}(r, t)| A_s(r, t)
 \end{aligned} \tag{2.34.b}$$

如果腔长  $L$  不是很大, 可以假设腔内光场的  $\text{TEM}_{00}$  模的光斑变化也不是很大, 所以  $\text{TEM}_{00}$  模的体积为:

$$V_{pu} = \frac{\pi \tilde{\omega}_{pu}^2 L}{4} \tag{2.35.a}$$

$$V_s = \frac{\pi \tilde{\omega}_s^2 L}{4} \tag{2.35.b}$$

$$V_{pus} = \frac{\pi L \tilde{\omega}_0^4}{4} \tan^{-1} \left( \frac{L\lambda}{2\pi \tilde{\omega}_0^2} \right) \tag{2.35.c}$$

其中  $\tilde{\omega}_{pu,s}$  为两光束在腔内的腰斑半径, 对于我们的实验, pump 光和 Stokes 光的频差为几个 GHz, 对应波长的万分之一或十万分之一, 所以认为两个光波的波长 (或波矢) 相等, 即为  $\lambda$ , 腔内的腰斑半径也相等  $\tilde{\omega}_{pu,s} = \tilde{\omega}_0$ , 所以  $V_{pu} = V_s = \pi \tilde{\omega}_0^2 L / 4$ 。2.35.c 式为 pump 光与 Stokes 光在腔内的重叠体积。

如果定义增益函数:

$$g_1(\delta) = \frac{\omega_s}{2\epsilon_0} \frac{N_a(\rho_{aa} - \rho_{bb})\gamma_{ba}}{(\Omega_{bb} - \Omega_{aa} + \delta)^2 + \gamma_{ba}^2} \frac{1}{(2\hbar)^2} \frac{\mu_{ae}^2 \mu_{be}^2}{\hbar(\omega_{pu} - \omega_{ea})} \frac{1}{\omega_s - \omega_{eb}} \frac{V_{pus}}{V_s} \tag{2.36}$$

利用  $\omega_{pu} - \omega_{ea} = \omega_s - \omega_{eb}$ , 并将 2.35 和 2.36 式代入 2.34 式:

$$\begin{aligned}
 & \frac{d}{dt} A_{pu}(t) + \left[ \frac{\gamma_{Rpu}}{2} - i(n_p \omega_{pu} - \omega_{cpu}) \right] A_{pu}(t) \\
 &= \frac{\gamma_{Tpu}}{2} A_{epu}(t) - g_1(\delta) \left( 1 - i \frac{\Omega_{bb} - \Omega_{aa} + \delta}{\gamma_{ba}} \right) |A_s(t)|^2 A_{pu}(t)
 \end{aligned} \tag{2.37.a}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{d}{dt} A_s(t) + \left[ \frac{\gamma_{Rs}}{2} - i(n_s \omega_s - \omega_{cs}) \right] A_s(t) = \\
 & g_1(\delta) \left( 1 + i \frac{\Omega_{bb} - \Omega_{aa} + \delta}{\gamma_{ba}} \right) |A_{pu}(r, t)| A_s(r, t)
 \end{aligned} \tag{2.37.b}$$

上式中我们已经假设  $\omega_{pu} / \omega_s \approx 1$ 。

在内腔受激 Raman 过程中, 产生的 Stokes 光与 pump 光同时在腔内振荡, 其相位必须满足一定的关系, 下面我们将考虑在双共振腔内 Stokes 光与 pump 光的相位

关系，两光场的电场强度可以写为：

$$A_{epu}(t) = \tilde{A}_{epu}(t) \exp[i\theta_p(t)] \quad (2.38.a)$$

$$A_{pu}(t) = \tilde{A}_{pu}(t) \exp[i\theta_p(t)] \quad (2.38.b)$$

$$A_s(t) = \tilde{A}_s(t) \exp[i\theta_s(t)] \quad (2.38.c)$$

上式中  $\tilde{A}_{epu}(t) = |A_{epu}(t)|$ ， $\tilde{A}_{pu} = |A_{pu}(t)|$ ， $\tilde{A}_s(t) = |A_s(t)|$ ，并且我们假设外腔耦合到腔内的 pump 光与内腔共振 pump 光相位始终相同。将 2.38 式代入 2.37 式：

$$\begin{aligned} & \frac{d\tilde{A}_{pu}(t)}{dt} + i\tilde{A}_{pu}(t) \frac{d\theta_p(t)}{dt} + \left[ \frac{\gamma_{Rpu}}{2} - i(n_p \omega_{pu} - \omega_{cpu}) \right] \tilde{A}_{pu}(t) \\ &= \frac{\gamma_{Tpu}}{2} \tilde{A}_{epu}(t) - g_1(\delta) \left( 1 - i \frac{\Omega_{bb} - \Omega_{aa} + \delta}{\gamma_{ba}} \right) \tilde{A}_s(t)^2 \tilde{A}_{pu}(t) \end{aligned} \quad (2.39.a)$$

$$\begin{aligned} & \frac{d\tilde{A}_s(t)}{dt} + i\tilde{A}_s(t) \frac{d\theta_s(t)}{dt} + \left[ \frac{\gamma_{Rs}}{2} - i(n_s \omega_s - \omega_{cs}) \right] \tilde{A}_s(t) \\ &= g_1(\delta) \left( 1 + i \frac{\Omega_{bb} - \Omega_{aa} + \delta}{\gamma_{ba}} \right) \tilde{A}_{pu}(t) \tilde{A}_s(t) \end{aligned} \quad (2.39.b)$$

上述两个方程中实部为光场振幅的演化方程，虚部为相位的方程。所以分离上式中的实部可得光场振幅的演化方程为：

$$\frac{d}{dt} \tilde{A}_{pu}(t) + \frac{\gamma_{Rpu}}{2} \tilde{A}_{pu}(t) = -g_1(\delta) \tilde{A}_s(t)^2 \tilde{A}_{epu}(t) + \frac{\gamma_{Tpu}}{2} \tilde{A}_{epu}(t) \quad (2.40.a)$$

$$\frac{d}{dt} \tilde{A}_s(t) + \frac{\gamma_{Rs}}{2} \tilde{A}_s(t) = g_1(\delta) \tilde{A}_{pu}(t)^2 \tilde{A}_s(t) \quad (2.40.b)$$

求解 2.40 式的稳态解可得：

$$\tilde{A}_{pu} = \sqrt{\frac{\gamma_{cs}}{2g_1(\delta)}} \quad (2.41.a)$$

$$\tilde{A}_s = \sqrt{\frac{\gamma_{epu} \tilde{A}_{epu} / \tilde{A}_{pu} - \gamma_{cp}}{2g_1(\delta)}} \quad (2.41.b)$$

所以在 2.41.b 式为零时，即 Stokes 光处于阈值时腔外注入的 pump 光和内腔 pump 光振幅的关系式：

$$\tilde{A}_{epu} = \frac{\gamma_{cp}}{\gamma_{epu}} \tilde{A}_{pu} \quad (2.42)$$

由内腔场的振幅可得内腔场强度为：

$$I_{pu} = \frac{cn_{pu}\epsilon_0}{2} \tilde{A}_{pu}(t)^2 \quad (2.43.a)$$

$$I_s = \frac{cn_s\epsilon_0}{2} \tilde{A}_s(t)^2 \quad (2.43.b)$$

上式中  $c$  为真空光速,  $n_{pu,s}$  为内腔光场的折射率(线性部分),  $\epsilon_0$  为真空介电常数。假设内腔场为平面波, 光场在垂直于轴线方向的截面上光强均匀分布, 所以内腔场的功率为:

$$W_{pu} = I_{pu}S = \epsilon_0 n_{pu} c \left| \tilde{A}_{pu} \right|^2 \frac{\pi\omega_{pu}^2}{2} = \epsilon_0 n_{pu} c \frac{\pi\omega_{pu}^2}{2} \frac{\gamma_{cs}}{2g_1(\delta)} \quad (2.44.a)$$

$$W_s = I_s S = \epsilon_0 n_s c \left| \tilde{A}_s \right|^2 \frac{\pi\omega_s^2}{2} = \epsilon_0 n_s c \frac{\pi\omega_s^2}{2} \frac{\gamma_{epu} \sqrt{W_{epu} / W_{pu}} - \gamma_{cp}}{2g_1(\delta)} \quad (2.44.b)$$

利用 2.43 式, 可得 Stokes 光处于阈值时, 腔外 pump 光和内腔 pump 光功率的关系为:

$$W_{epu} = \left( \frac{\gamma_{cpu}}{\gamma_{epu}} \right)^2 W_{pu} = \frac{(\ln r_1 r_2)^2}{4t_1^2} W_{pu} \quad (2.45)$$

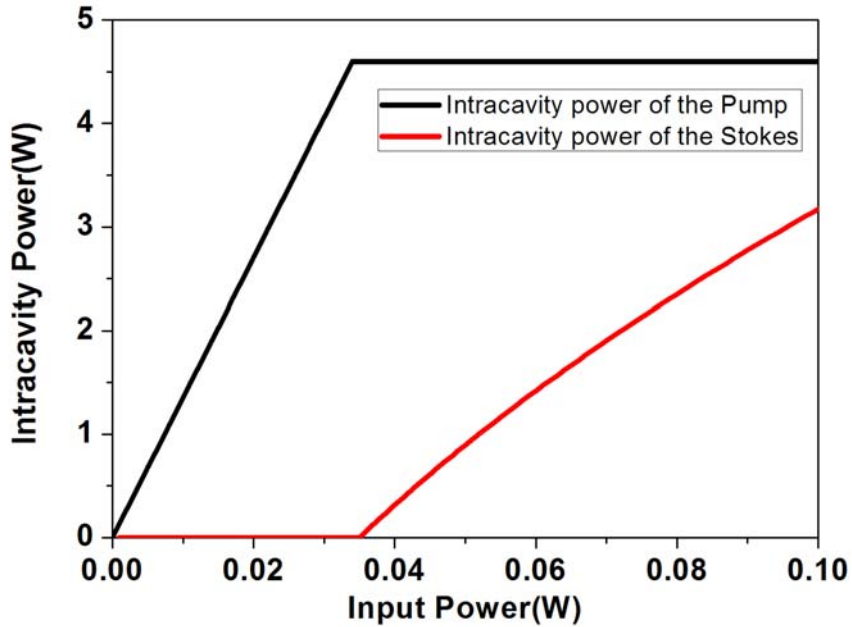


图 2.2 内腔 pump 光和 Stokes 光功率随外部注入 pump 光功率的变化

图 2.2 为理论计算的内腔 pump 光和 Stokes 光功率随外部注入 pump 光功率的变化曲线, 用到的参数为,  $\omega_{pu} \approx \omega_s = 2\pi \times 3.84 \times 10^{14}$  (铷原子 D2 线),  $\gamma_{ab} = 20\text{MHz}$ ,

$L=17\text{cm}$ ,  $R_1=90\%$ ,  $R_2=99.5\%$ ,  $\omega_0=50\mu\text{m}$ , 并且在 pump 光和 Stokes 光频率相差很小时, 假设腔镜对两者的反射率、透射率和损耗等都相同。从图中可以看出在外部注入的 pump 光功率小于 Stokes 光的阈值时内腔 pump 功率 (黑线) 随外部注入 pump 光功率线性变化, 在 Stokes 光达到阈值以后, pump 光功率由于向 Stokes 光转化而基本保持不变, 此时 Stokes 光 (红线) 基本呈线性增长。但是这里没有考虑 Stokes 光达到一定增益后的饱和效应和腔内的其他损耗。

提取 2.39 式的虚部可得内腔场的相位演化方程为:

$$\frac{d\theta_{pu}(t)}{dt} + \omega_{pu} = \omega_{cpu} - (n_{pu} - 1)\omega_{pu} - g_1(\delta)\tilde{A}_s(t)^2 \frac{\Omega_{bb} - \Omega_{aa} + \delta}{\gamma_{ab}} \quad (2.46.a)$$

$$\frac{d\theta_s(t)}{dt} + \omega_s = \omega_{cs} - (n_s - 1)\omega_s - g_1(\delta)\tilde{A}_{pu}(t)^2 \frac{\Omega_{bb} - \Omega_{aa} + \delta}{\gamma_{ab}} \quad (2.46.b)$$

由上式可以看出, 在稳态条件下对于  $\dot{\theta}_{pu(s)} \neq 0$ , 其大小即为频率迁移量。如果假设 pump 光对该三能级系统两个基态能级的 Stark 平移量相同, 基于前面的计算的结果, 如果双光子失谐量在 MHz 量级, pump 光和 Stokes 光的频率迁移量将小于 MHz。

## 2. 4. 2 内腔 anti-Stokes 光的产生—三模共振腔

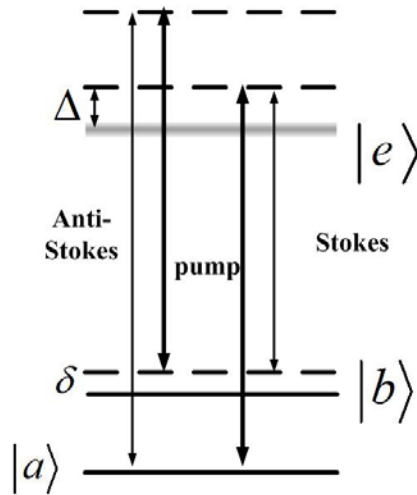


图 2.3 相干 anti-Stokes Raman 过程能级图

如果 anti-Stokes 共振的条件得以满足, pump 光、Stokes 光和 anti-Stokes 光将可能同时在腔内共振, 形成三共振腔。与前面分析类似, 当三束光同时存在时, 相干 anti-Stokes Raman 过程对应的等效二能级系统的跃迁矩阵元, 由 2.9 式和 2.13 式可得:

$$\rho_{ab} = -\frac{(\rho_{bb} - \rho_{aa})}{(\Omega_{aa} - \Omega_{bb} + \delta) + i\gamma_{ba}} \frac{1}{(2\hbar)^2} \left( \frac{\mu_{ae}\mu_{be}A_s A_{pu}^*}{\omega_s - \omega_{eb}} + \frac{\mu_{ae}\mu_{be}A_{pu} A_{as}^*}{\omega_{pu} - \omega_{eb}} \right) \quad (2.47)$$

将上式代入 2.17 式，三个光场对应的电极化强度为：

$$\begin{aligned} P_{pu} &= \frac{-N_a \mu_{ae}^2 \rho_{aa}}{\hbar(\omega_{pu} - \omega_{ea})} A_{pu} \\ &+ \frac{N_a \mu_{be} \mu_{ae}}{\hbar(\omega_s - \omega_{eb})} \frac{(\rho_{aa} - \rho_{bb})}{(\Omega_{bb} - \Omega_{aa} + \delta) - i\gamma_{ba}} \frac{1}{(2\hbar)^2} \left( \frac{\mu_{ae}\mu_{be}}{\omega_s - \omega_{eb}} |A_s|^2 A_{pu} \right. \\ &+ \left. \frac{\mu_{ae}\mu_{be}}{\omega_{pu} - \omega_{eb}} A_{pu}^* A_s A_{as} \right) \end{aligned} \quad (2.48.a)$$

$$\begin{aligned} P_s &= \frac{-N_a \mu_{be} \mu_{be} \rho_{bb}}{\hbar(\omega_s - \omega_{eb})} A_s + \frac{N_a \mu_{be} \mu_{ea}}{\hbar(\omega_{pu} - \omega_{ea})} \frac{(\rho_{aa} - \rho_{bb})}{(\Omega_{bb} - \Omega_{aa} + \delta) + i\gamma_{ba}} \frac{1}{(2\hbar)^2} \left( \frac{\mu_{ae}\mu_{be}}{\omega_s - \omega_{eb}} |A_{pu}|^2 A_s \right. \\ &+ \left. \frac{\mu_{ae}\mu_{be} A_{pu} A_{pu} A_{as}^*}{\omega_{pu} - \omega_{eb}} \right) \end{aligned} \quad (2.48.b)$$

$$\begin{aligned} P_{as} &= \frac{-N_a \mu_{ae} \mu_{ea} A_{as}}{\hbar(\omega_{as} - \omega_{ea})} \rho_{aa} + \frac{N_a \mu_{ae} \mu_{eb}}{\hbar(\omega_{pu} - \omega_{eb})} \frac{(\rho_{aa} - \rho_{bb})}{(\Omega_{bb} - \Omega_{aa} + \delta) - i\gamma_{ba}} \frac{1}{(2\hbar)^2} \left( \frac{\mu_{ae}\mu_{be}}{\omega_{pu} - \omega_{eb}} |A_{pu}|^2 A_{as} \right. \\ &+ \left. \frac{\mu_{ae}\mu_{be} A_{pu} A_{pu} A_s^*}{\omega_s - \omega_{eb}} \right) \end{aligned} \quad (2.48.c)$$

上式中，在双光子失谐非常小的情况下我们假设  $\omega_{as} - \omega_{ea} = \omega_{pu} - \omega_{eb}$  和  $\omega_{pu} - \omega_{ea} = \omega_s - \omega_{eb}$  成立。将 2.48 式代入 2.22 式可得内腔场方程为：

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} A_{pu}(t) + \left[ \frac{\gamma_{Rpu}}{2} - i(\omega_{pu} - \omega_{cpu}) \right] A_{pu}(t) &= \frac{\gamma_{Tpu}}{2} A_{cpu}(t) + i \frac{\omega_{pu}}{2\varepsilon_0} \frac{-N_a \mu_{ae}^2 \rho_{aa}}{\hbar(\omega_{pu} - \omega_{ea})} A_{pu}(t) \\ &+ i \frac{\omega_{pu}}{2\varepsilon_0 V_{pu}} \frac{N_a \mu_{be} \mu_{ae}}{\hbar(\omega_s - \omega_{eb})} \frac{(\rho_{aa} - \rho_{bb})}{(\Omega_{bb} - \Omega_{aa} + \delta) - i\gamma_{ba}} \frac{\mu_{ae}\mu_{be}}{(2\hbar)^2 \omega_{pu} - \omega_{eb}} \\ &\times [a V_{pus} |A_s|^2 A_{pu}(t) + V_{pus} A_{pu}^*(t) A_s(t) A_{as}(t)] \quad (2.49.a) \\ &+ i \frac{\omega_{pu}}{2\varepsilon_0 V_{pu}} \frac{N_a \mu_{ae} \mu_{be}}{\hbar(\omega_{as} - \omega_{ea})} \frac{(\rho_{aa} - \rho_{bb})}{(\Omega_{bb} - \Omega_{aa} + \delta) + i\gamma_{ba}} \frac{\mu_{ae}\mu_{be}}{(2\hbar)^2 \omega_s - \omega_{eb}} \\ &\times [V_{pus} A_{pu}^*(t) A_s(t) A_{as}(t) + \frac{1}{a} V_{puas} |A_{as}|^2 A_{pu}(t)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} A_s(t) + \left[ \frac{\gamma_{Rs}}{2} - i(\omega_s - \omega_{cs}) \right] A_s(t) &= i \frac{\omega_s}{2\varepsilon_0} \frac{-N_a \mu_{be} \mu_{be} \rho_{bb}}{\hbar(\omega_s - \omega_{eb})} A_s(t) \\
 + i \frac{\omega_s}{2\varepsilon_0 V_s} \frac{N_a \mu_{be} \mu_{ea}}{\hbar(\omega_{pu} - \omega_{eb})} \frac{(\rho_{aa} - \rho_{bb})}{(\Omega_{bb} - \Omega_{aa} + \delta) + i\gamma_{ba}} \frac{\mu_{ae} \mu_{be}}{(2\hbar)^2 \omega_s - \omega_{eb}} & [a V_{pus} |A_{pu}|^2 A_s(t) \\
 + V_{pupas} A_{pu}(t) A_{pu}(t) A_{as}^*(t)] & \quad (2.49.b)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} A_{as}(t) + \left[ \frac{\gamma_{Ras}}{2} - i(\omega_{as} - \omega_{cas}) \right] A_{as}(t) &= i \frac{\omega_{as}}{2\varepsilon_0} \frac{-N_a \mu_{ae} \mu_{ea} \rho_{aa}}{\hbar(\omega_{as} - \omega_{ea})} A_{as}(t) \\
 + i \frac{\omega_{as}}{2\varepsilon_0 V_{as}} \frac{N_a \mu_{ae} \mu_{eb}}{\hbar(\omega_{pu} - \omega_{eb})} \frac{(\rho_{aa} - \rho_{bb})}{(\Omega_{bb} - \Omega_{aa} + \delta) - i\gamma_{ba}} \frac{\mu_{ae} \mu_{be}}{(2\hbar)^2 \omega_s - \omega_{eb}} & \left[ \frac{1}{a} V_{pus} |A_{pu}|^2 A_{as}(t) \right. \\
 + V_{pupas} A_{pu}(t) A_{pu}(t) A_{as}^*(t) & \quad (2.49.c)
 \end{aligned}$$

其中,  $a = \frac{\omega_{pu} - \omega_{eb}}{\omega_s - \omega_{eb}} = \frac{\omega_{as} - \omega_{ea}}{\omega_{pu} - \omega_{ea}}$ , anti-Stokes 光的 TEM<sub>00</sub> 模体积  $V_{as} = V_{pu} = V_s = \pi \tilde{\omega}_0^2 L / 4$ ,

Pump 光和 anti-Stokes 光重叠的模体积  $V_{pus} = V_{pus} = \frac{\pi L \tilde{\omega}_0^4}{4} \tan^{-1} \left( \frac{L \lambda}{2\pi \tilde{\omega}_0^2} \right)$ , 而三束光重叠

的模体积  $V_{pusas} = \frac{\pi \omega_0^2 \sin(2k_p - k_{as} - k_s)}{12} \frac{1}{2k_p - k_{as} - k_s}$ 。同样定义增益函数:

$$g_2(\delta) = \frac{\omega_s}{4\varepsilon_0} \frac{N_a (\rho_{aa} - \rho_{bb}) \gamma_{ba}}{(\Omega_{bb} - \Omega_{aa} + \delta)^2 + \gamma_{ba}^2} \frac{1}{(2\hbar)^2} \frac{\mu_{ae}^2 \mu_{be}^2}{\hbar(\omega_{pu} - \omega_{eb})} \frac{1}{\omega_s - \omega_{eb}} \frac{\tan^{-1}(L\lambda / 2\pi\omega_0^2)}{L\lambda / 2\pi\omega_0^2} \quad (2.50)$$

将 2.50 式代入 2.49 式:

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} A_{pu}(t) + \frac{\gamma_{Rpu}}{2} A_{pu}(t) &= \frac{\gamma_{Tpu}}{2} A_{epu}(t) - g_2(\delta) \left( 1 - i \frac{\Omega_{bb} - \Omega_{aa} + \delta}{\gamma_{ab}} \right) \{ a |A_s|^2 A_{pu}(t) \\
 + \frac{2 \sin[(2k_{pu} - k_s - k_{as})L / 2]}{3} \frac{1}{(2k_{pu} - k_s - k_{as})L / 2} & A_{pu}^*(t) A_s(t) A_{as}(t) \} + g_2(\delta) \left( 1 + i \frac{\Omega_{bb} - \Omega_{aa} + \delta}{\gamma_{ab}} \right) \\
 \times \left\{ \frac{2 \sin[(2k_{pu} - k_s - k_{as})L / 2]}{3} \frac{1}{(2k_{pu} - k_s - k_{as})L / 2} & A_{pu}^*(t) A_s(t) A_{as}(t) + \frac{1}{a} |A_{as}|^2 A_{pu}(t) \right\} \quad (2.51.a)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} A_s(t) + \frac{\gamma_{Rs}}{2} A_s(t) &= g_2(\delta) \left( 1 + i \frac{\Omega_{bb} - \Omega_{aa} + \delta}{\gamma_{ab}} \right) \{ a |A_{pu}|^2 A_s(t) \\
 + \frac{2 \sin[(2k_{pu} - k_s - k_{as})L / 2]}{3} \frac{1}{(2k_{pu} - k_s - k_{as})L / 2} & A_{pu}(t) A_{pu}(t) A_{as}^*(t) \} \quad (2.51.b)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} A_{as}(t) + \frac{\gamma_{Ras}}{2} A_{as}(t) &= -g_2(\delta) \left( 1 - i \frac{\Omega_{bb} - \Omega_{aa} + \delta}{\gamma_{ab}} \right) \left\{ \frac{1}{a} |A_{pu}|^2 A_{as}(t) \right. \\
 + \frac{2 \sin[(2k_{pu} - k_s - k_{as})L / 2]}{3} \frac{1}{(2k_{pu} - k_s - k_{as})L / 2} & A_{pu}(t) A_{pu}(t) A_{as}^*(t) \} \quad (2.51.c)
 \end{aligned}$$

与前面的处理方法类似，在内腔相干 anti-Stokes Raman 过程中，产生的 Stokes、anti-Stokes 光与 pump 光同时在腔内振荡，也需要满足一定的相位关系，考虑到相位关系后，各光场的电场强度可以写为：

$$A_{epu}(t) = \tilde{A}_{epu}(t) \exp[i\theta_p(t)] \quad (2.52.a)$$

$$A_{pu}(t) = \tilde{A}_{pu}(t) \exp[i\theta_p(t)] \quad (2.52.b)$$

$$A_s(t) = \tilde{A}_s(t) \exp[i\theta_s(t)] \quad (2.52.c)$$

$$A_{as}(t) = \tilde{A}_{as}(t) \exp[i\theta_{as}(t)] \quad (2.52.d)$$

上式中  $\tilde{A}_{epu}(t) = |A_{epu}(t)|$ ， $\tilde{A}_{pu} = |A_{pu}(t)|$ ， $\tilde{A}_s(t) = |A_s(t)|$ ， $\tilde{A}_{as}(t) = |A_{as}(t)|$ ，这里同样假设外腔耦合到腔内的 pump 光与内腔共振 pump 光相位相同。将以上各式代入 2.51 式：

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{A}_{pu}(t)}{dt} + i\tilde{A}_{pu}(t) \frac{d\theta_{pu}(t)}{dt} + \frac{\gamma_{Rpu}}{2} \tilde{A}_{pu}(t) &= \frac{\gamma_{Tpu}}{2} \tilde{A}_{pu}(t) \\ -g_2(\delta) \left(1 - i \frac{\Omega_{bb} - \Omega_{aa} + \delta}{\gamma_{ab}}\right) \{a |A_s|^2 \tilde{A}_{pu}(t) \\ + \frac{2 \sin[(2k_{pu} - k_s - k_{as})L/2]}{(2k_{pu} - k_s - k_{as})L/2} \tilde{A}_{pu}(t) \tilde{A}_s(t) \tilde{A}_{as}(t) \exp i[\theta_s(t) + \theta_{as}(t) - 2\theta_{pu}(t)]\} \end{aligned} \quad (2.53.a)$$

$$\begin{aligned} +g_2(\delta) \left(1 + i \frac{\Omega_{bb} - \Omega_{aa} + \delta}{\gamma_{ab}}\right) \left\{ \frac{1}{a} |A_{as}|^2 A_{pu}(t) \right. \\ \left. + \frac{2 \sin[(2k_{pu} - k_s - k_{as})L/2]}{(2k_{pu} - k_s - k_{as})L/2} \tilde{A}_{pu}(t) \tilde{A}_s(t) \tilde{A}_{as}(t) \exp i[\theta_s(t) + \theta_{as}(t) - 2\theta_{pu}(t)] \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{A}_s(t)}{dt} + i\tilde{A}_s(t) \frac{d\theta_s}{dt} + \frac{\gamma_{Rs}}{2} \tilde{A}_s(t) &= g_2(\delta) \left(1 + i \frac{\Omega_{bb} - \Omega_{aa} + \delta}{\gamma_{ab}}\right) \{a |A_{pu}|^2 \tilde{A}_s(t) \\ + \frac{2 \sin[(2k_{pu} - k_s - k_{as})L/2]}{(2k_{pu} - k_s - k_{as})L/2} \tilde{A}_{pu}(t) \tilde{A}_s(t) \tilde{A}_{as}(t) \exp i[2\theta_{pu}(t) - \theta_s(t) - \theta_{as}(t)]\} \end{aligned} \quad (2.53.b)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{A}_{as}(t)}{dt} + i\tilde{A}_{as}(t) \frac{d\theta_{as}(t)}{dt} + \frac{\gamma_{Ras}}{2} \tilde{A}_{as}(t) &= -g_2(\delta) \left(1 - i \frac{\Omega_{bb} - \Omega_{aa} + \delta}{\gamma_{ab}}\right) \times \left\{ \frac{1}{a} |A_{pu}|^2 \tilde{A}_{as}(t) \right. \\ \left. + \frac{2 \sin[(2k_{pu} - k_s - k_{as})L/2]}{(2k_{pu} - k_s - k_{as})L/2} \tilde{A}_{pu}(t) \tilde{A}_s(t) \tilde{A}_{as}(t) \exp i[2\theta_{pu}(t) - \theta_s(t) - \theta_{as}(t)] \right\} \end{aligned} \quad (2.53.c)$$

分离上式中的实部，则内腔场振幅演化方程为：



$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \tilde{A}_{pu} + \frac{\gamma_{Rpu}}{2} \tilde{A}_{pu} &= \frac{\gamma_{Tpu}}{2} \tilde{A}_{epu} \\
 -g_2(\delta) \{ a \tilde{A}_s^2 \tilde{A}_{pu} + \frac{2 \sin[(2k_{pu} - k_s - k_{as})L/2]}{3(2k_{pu} - k_s - k_{as})L/2} \tilde{A}_{pu} \tilde{A}_s \tilde{A}_{as} \cos[2\theta_{pu} - \theta_s - \theta_{as}] \} \\
 +g_2(\delta) \{ \frac{1}{a} \tilde{A}_{as}^2 \tilde{A}_{pu} + \frac{2 \sin[(2k_{pu} - k_s - k_{as})L/2]}{3(2k_{pu} - k_s - k_{as})L/2} \tilde{A}_{pu} \tilde{A}_s \tilde{A}_{as} \cos[2\theta_{pu} - \theta_s - \theta_{as}] \} & \quad (2.54.a) \\
 -\frac{4 \sin[(2k_{pu} - k_s - k_{as})L/2]}{3(2k_{pu} - k_s - k_{as})L/2} \times \frac{\Omega_{bb} - \Omega_{aa} + \delta}{\gamma_{ab}} \\
 \times g_2(\delta) \tilde{A}_{pu} \tilde{A}_s \tilde{A}_{as} \sin[2\theta_{pu} - \theta_s - \theta_{as}] &
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \tilde{A}_s + \frac{\gamma_{Rs}}{2} \tilde{A}_s &= a g_2(\delta) \tilde{A}_{pu}^2 \tilde{A}_s \\
 + \frac{2 \sin[(2k_{pu} - k_s - k_{as})L/2]}{3(2k_{pu} - k_s - k_{as})L/2} g_2(\delta) \tilde{A}_{pu} \tilde{A}_{pu} \tilde{A}_{as} \{ \cos[2\theta_{pu} - \theta_s - \theta_{as}] & \quad (2.54.b) \\
 - \frac{\Omega_{bb} - \Omega_{aa} + \delta}{\gamma_{ab}} \sin[2\theta_{pu} - \theta_s - \theta_{as}] \} &
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \tilde{A}_{as} + \frac{\gamma_{Rs}}{2} \tilde{A}_{as} &= -\frac{1}{a} g_2(\delta) \tilde{A}_{pu}^2 \tilde{A}_{as} \\
 - \frac{2 \sin[(2k_{pu} - k_s - k_{as})L/2]}{3(2k_{pu} - k_s - k_{as})L/2} g_2(\delta) \tilde{A}_{pu}^2 \tilde{A}_s \{ \cos[2\theta_{pu} - \theta_s - \theta_{as}] & \quad (2.54.c) \\
 + \frac{\Omega_{bb} - \Omega_{aa} + \delta}{\gamma_{ab}} \sin[2\theta_{pu} - \theta_s - \theta_{as}] \} &
 \end{aligned}$$

提取 2.53 式的虚部可得：

$$\begin{aligned}
 \frac{d\theta_{pu}}{dt} &= g_2(\delta) \frac{\Omega_{bb} - \Omega_{aa} + \delta}{\gamma_{ab}} \{ a |A_s|^2 + q \tilde{A}_s \tilde{A}_{as} \cos[\theta_s + \theta_{as} - 2\theta_{pu}] \} \\
 + g_2(\delta) \frac{\Omega_{bb} - \Omega_{aa} + \delta}{\gamma_{ab}} \{ \frac{1}{a} |A_s|^2 + q \tilde{A}_s \tilde{A}_{as} \cos[\theta_s + \theta_{as} - 2\theta_{pu}] \} & \quad (2.55.a)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{d\theta_s}{dt} &= g_2(\delta) q \tilde{A}_{pu} \tilde{A}_{as} \sin[2\theta_{pu} - \theta_s - \theta_{as}] \\
 + g_2(\delta) \frac{\Omega_{bb} - \Omega_{aa} + \delta}{\gamma_{ab}} \{ a |A_{pu}|^2 + q \tilde{A}_{pu}(t) \tilde{A}_{as}(t) \cos[2\theta_{pu} - \theta_s - \theta_{as}] \} & \quad (2.55.b)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{d\theta_{as}}{dt} &= -g_2(\delta) q \tilde{A}_{pu} \tilde{A}_s \sin[2\theta_{pu} - \theta_s - \theta_{as}] \\
 + g_2(\delta) \frac{\Omega_{bb} - \Omega_{aa} + \delta}{\gamma_{ab}} \times \{ \frac{1}{a} |A_{pu}|^2 + q \tilde{A}_{pu} \tilde{A}_s \cos[2\theta_{pu} - \theta_s - \theta_{as}] \} & \quad (2.55.c)
 \end{aligned}$$

在双光子失谐为 0 时，Raman 诱导的频率迁移都为 0，即上式中等号左边均为零

(这里假设  $\Omega_{bb} - \Omega_{aa} = 0$ ), 此时由上式可以解得相位差的正弦值为零, 但是其余弦值可以取  $\pm 1$ 。因此会有两种情况出现。

如果在稳态条件下, 各内腔光场的频率迁移为零时, 可得振幅的稳态解为:

$$\frac{\gamma_{Rpu}}{2} \tilde{A}_{pu} - \frac{\gamma_{Tpu}}{2} \tilde{A}_{epu} = -a g_2(\delta) \tilde{A}_s^2 \tilde{A}_{pu} + \frac{1}{a} g_2(\delta) \tilde{A}_{as}^2 \tilde{A}_{pu} \quad (2.56.a)$$

$$\frac{\gamma_{cs}}{2} \tilde{A}_s = a g_2(\delta) \tilde{A}_{pu}^2 \tilde{A}_s \pm \frac{2 \sin[(2k_{pu} - k_s - k_{as})L/2]}{3 (2k_{pu} - k_s - k_{as})L/2} g_2(\delta) \tilde{A}_{pu}^2 \tilde{A}_s \quad (2.56.b)$$

$$\frac{\gamma_{cas}}{2} \tilde{A}_{as} = -\frac{1}{a} g_2(\delta) \tilde{A}_{pu}^2 \tilde{A}_{as} \mp \frac{2 \sin[(2k_{pu} - k_s - k_{as})L/2]}{3 (2k_{pu} - k_s - k_{as})L/2} g_2(\delta) \tilde{A}_{pu}^2 \tilde{A}_s \quad (2.56.c)$$

如果设参量:

$$q = \frac{2 \sin[(2k_{pu} - k_s - k_{as})L/2]}{3 (2k_{pu} - k_s - k_{as})L/2} \quad (2.57)$$

将上式代入 2.56 式, 并由 2.56.b 除以 2.56.c 可得:

$$\mp q \frac{\gamma_{cs}}{\gamma_{cas}} \left( \frac{\tilde{A}_s}{\tilde{A}_{as}} \right)^2 - \left( \frac{1}{a} \frac{\gamma_{cs}}{\gamma_{cas}} + a \right) \frac{\tilde{A}_s}{\tilde{A}_{as}} \mp q = 0 \quad (2.58)$$

在  $[a + \gamma_{cs} / (a\gamma_{cas})]^2 - 4q^2 \gamma_{cs} / \gamma_{cas} > 0$  的条件下, 由该方程可得具有物理意义的解为:

$$\text{当 } a < 0 \text{ 时, } \frac{\tilde{A}_s}{\tilde{A}_{as}} = -\frac{a + \gamma_{cs} / (a\gamma_{cas}) \pm \sqrt{[a + \gamma_{cs} / (a\gamma_{cas})]^2 - 4q^2 \gamma_{cs} / \gamma_{cas}}}{2q\gamma_{cs} / \gamma_{cas}} \quad (2.59.a)$$

$$\text{当 } a > 0 \text{ 时, } \frac{\tilde{A}_s}{\tilde{A}_{as}} = \frac{a + \gamma_{cs} / (a\gamma_{cas}) \pm \sqrt{[a + \gamma_{cs} / (a\gamma_{cas})]^2 - 4q^2 \gamma_{cs} / \gamma_{cas}}}{2q\gamma_{cs} / \gamma_{cas}} \quad (2.59.b)$$

对 2.56.b 式等式两边同时除以  $\tilde{A}_{as}$  :

$$\tilde{A}_{pu} = \sqrt{\frac{\gamma_{cs}}{2} \frac{\tilde{A}_s / \tilde{A}_{as}}{g_2(\delta) (a\tilde{A}_s / \tilde{A}_{as} \pm q)}} \quad (2.60)$$

将 2.59 式代入 2.56.a 式中,

$$\tilde{A}_{as} = \frac{\tilde{A}_s}{\tilde{A}_{as}} \sqrt{\frac{\frac{\gamma_{Tpu}}{2} \frac{\tilde{A}_{ep}}{\tilde{A}_p} - \frac{\gamma_{Rpu}}{2}}{g_2(\delta) [a(\tilde{A}_s / \tilde{A}_{as})^2 - 1/a]}} \quad (2.61.a)$$

$$\tilde{A}_s = \sqrt{\frac{\frac{\gamma_{Tpu}}{2} \frac{\tilde{A}_{ep}}{\tilde{A}_p} - \frac{\gamma_{Rpu}}{2}}{g_2(\delta) [a(\tilde{A}_s / \tilde{A}_{as})^2 - 1/a]}} \quad (2.61.b)$$

从上两个式子可以得到另一个限制条件为  $g(\delta)/a[(a\tilde{A}_s/\tilde{A}_{as})^2 - 1] > 0$ ，否则  $\tilde{A}_s$  和  $\tilde{A}_{as}$  将为虚数，因此只有在特定失谐条件下，腔内才能形成多模共振。如果设 Stokes 光和 anti-Stokes 光振幅的比值为：

$$f = \frac{\tilde{A}_s}{\tilde{A}_{as}} \quad (2.62)$$

所以内腔中 Stokes 光和 anti-Stokes 光的功率为：

$$W_s = I_s S = \varepsilon_0 n_s c \frac{\pi \omega_s^2}{2} f^2 \frac{\frac{\gamma_{Tpu} \tilde{A}_{ep}}{2 \tilde{A}_p} - \frac{\gamma_{Rpu}}{2}}{g(\delta)[a(\tilde{A}_s/\tilde{A}_{as})^2 - 1/a]} \quad (2.63.a)$$

$$W_{as} = I_{as} S = \varepsilon_0 n_{as} c \frac{\pi \omega_{as}^2}{2} \frac{\frac{\gamma_{Tpu} \tilde{A}_{ep}}{2 \tilde{A}_p} - \frac{\gamma_{Rpu}}{2}}{g(\delta)[a(\tilde{A}_s/\tilde{A}_{as})^2 - 1/a]} \quad (2.63.b)$$

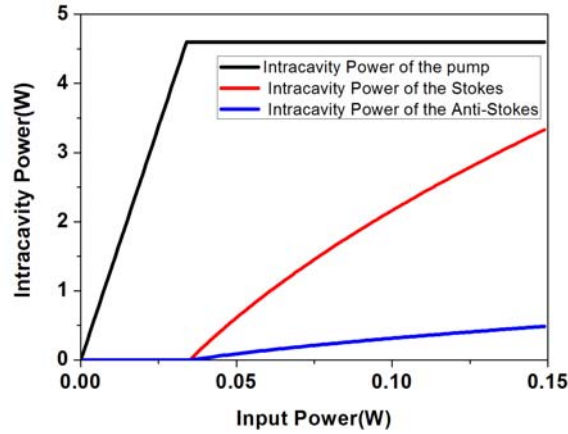


图 2.4 在  $a=-1$ ， $q=2/3$  时各内腔场功率随外部注入 pump 光功率的变化。

图 2.4 为理论计算的在  $a=-1$  和  $q=2/3$  时，相干 anti-Stokes Raman 过程中内腔 pump 光（黑线）、Stokes 光（红线）和 anti-Stokes 光（蓝线）功率随注入的 pump 光功率变化曲线，计算中所用参数基本与前一节中的相同。由该图可以看出，anti-Stokes 光功率比 Stokes 功率低，其比值为  $1/f^2$ ， $f$  值完全由腔的几何条件决定，考虑到我们实验中谐振腔的参数，在相位匹配条件下  $f=2.6$ 。

## 2. 5 内腔四波混频过程的相关实验

在本节中，我们将介绍利用腔增强作用实现内腔 FWM 过程的实验。在实验中我

们使用自制的 Littrow 式光栅外腔反馈式半导体激光器，激光二极管为 Eagleyard 公司生产的 EYP-RWE-0790-04000-0750-SOT01-0000 型，输出功率 50mW，工作温度 24°C，最大工作电流 200mA。光栅为铝质镀膜，条纹数 1800/mm，一级衍射光反馈回激光器，零级作为输出光。光栅固定在 PZT 上，通过调节反馈的角度扫描输出的频率（波长），激光器波长通过光栅调节到 780nm 处（铷原子 D2 线）。激光器的输出光一部分用作饱和吸收谱，另一部分注入锥形放大器。锥形放大器前注入功率为 10mW，在锥形放大器工作电流为 1.4A 时，经放大后输出功率为 300mW，工作温度 22°C。由于锥形放大器的输出光的空间模式很差，所以我们将输出光耦合到单模保偏光纤中，经过光纤后输出功率降为 160mW，效率为 53%。从光纤输出的光作为 pump 光，经过一个焦距为 250mm 的透镜进行模式匹配，耦合到 FP 腔中。腔的长度为 17.7cm，自由光谱区为 847MHz。两个腔镜的曲率半径 10cm，输入镜和输出镜的反射率（透射率）分别为 90%（10%）和 99.5%（0.5%）。输入镜固定在 PZT 上用以扫描腔的长度。腔的精细度为 60，线宽为 14MHz。实验光路如图 2.5 所示。因为前腔镜的透射率较大，所以我们在实验中测量腔的反射场。Pump 光在匹配透镜前先经过 PBS，再通过一个波片（ $\lambda/2$  或  $\lambda/4$ ），然后进入腔内。因为腔内存在很强的非线性过程，所以反射场不仅包括 pump 光，还有 Stokes 光和 anti-Stokes 光等。在反射场两次经过波片后偏振变为垂直方向，被 PBS 反射到下面，经过隔离器后耦合到另一个 FP 腔中，用来监视实验腔的输出场。

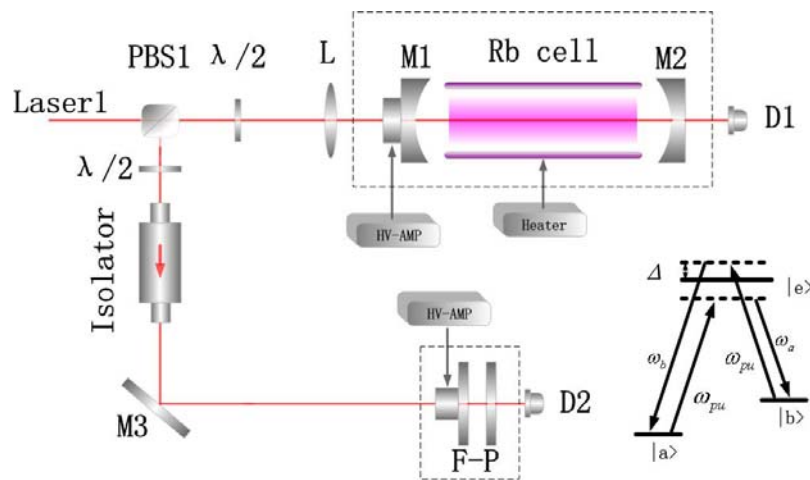


图 2.5 内腔一阶四波混频实验光路图

实验中的铷泡是由 Triad Technology 生产的 TT-RB-75-Q-AR 型，长为 75mm，直径 25mm，气室两个窗口镀有减反膜，在 780nm 附近反射率小于 0.1%，其中铷 85

和  $^{87}\text{Rb}$  原子为自然混合，原子数目所占比值为 72.2%和 27.8%。其温度通过加热器来控制。

在腔内放入介质以后，由于铷泡的端面并不一定与光路垂直，会改变原来腔内光路，另一方面，由于介质的色散作用，也会影响腔的模式匹配。所以在实验中，首先调节空腔和匹配透镜，其判断的依据为腔的  $\text{TEM}_{00}$  模透射峰达到最大，其他高阶模最小。达到最佳模式匹配后，将铷泡放在腔的中心处，通过调节铷泡支架，使铷泡端面与光路垂直。此时铷泡未被加热。然后调节匹配透镜和腔，使透射更强，直到最大。接下来再升高铷泡温度到  $125^\circ\text{C}$ 。因为铷泡温度升高，支架产生膨胀，因此会改变端面方向，另一方面较高的原子数目使色散变大，所以需要进一步模式匹配。但此时激光器频率在原子吸收线附近，色散和吸收会显著影响腔的模式<sup>[2.22,2.23]</sup>，所以先将激光器调节到远失谐处，然后重复上述步骤。在以上过程中，pump 光功率较低，以免饱和探测器 D1。

模式匹配调节完成后，将激光器频率调回到铷原子 D2 线以进行后面的实验。我们首先测量了在 pump 光功率较低时的实验腔的透射谱，如图 2.7 所示。图中绿线为在  $125^\circ\text{C}$  时 pump 光远失谐的透射谱，红线为 pump 光频率在如图 2.6 所示的范围内扫描时的透射谱。从图中可以看出，在超强耦合区域的多正交模劈裂峰结构<sup>[2.22]</sup>，以及由于铷 85 和 87 原子的强烈吸收形成的透射谱的大的吸收轮廓。对于铷 85 和 87 混合的介质，这种强烈的吸收和色散会对内腔 FWM 的增益产生重要的影响<sup>[2.20, 2.24]</sup>。

然后我们停止扫描 pump 光的频率，提高 pump 光功率到 100mW，铷泡的温度从室温缓慢升高。同时手动调节 pump 光的失谐和实验腔上的 PZT 电压，改变腔长，观察监视腔的透射谱。图 2.8 为对应 2.6 图中所标出的 pump 光失谐位置时的实验腔的反射场在监视腔的透射谱，此时铷泡温度为  $125^\circ\text{C}$ 。

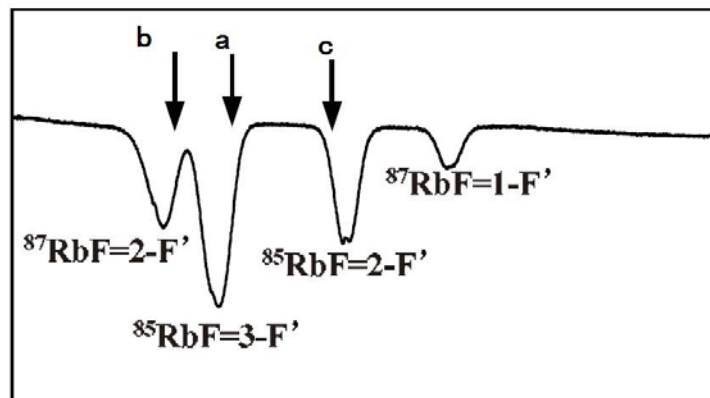


图 2.6 铷原子的饱和吸收谱

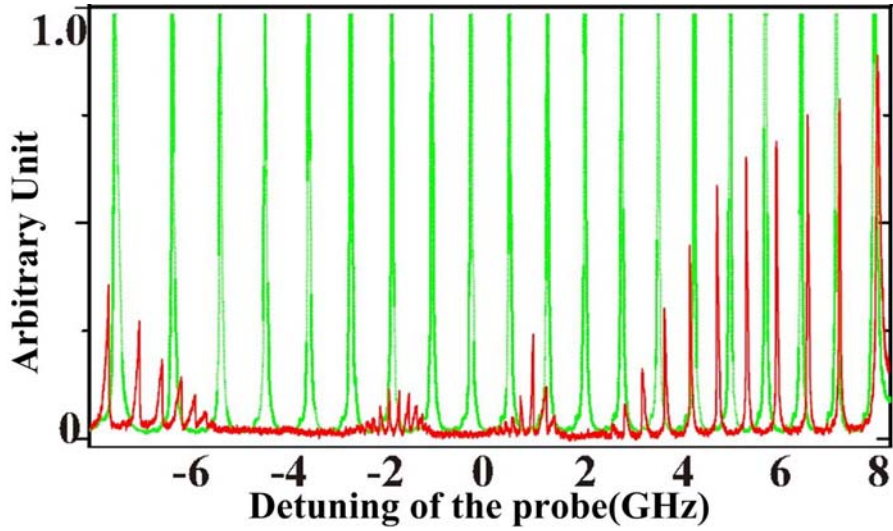


图 2.7 低功率时 pump 光的透射谱

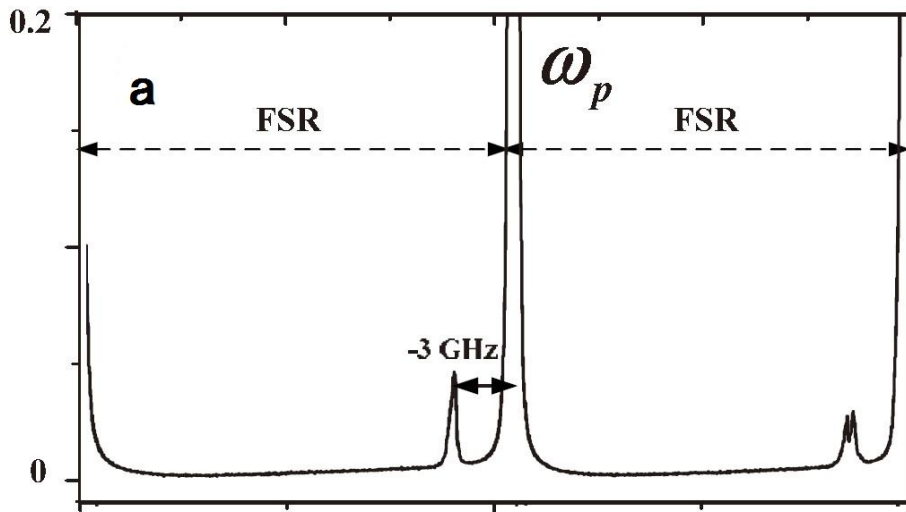


图 2.8.a. pump 光功率 100mW, 失谐与 2.6 图中 a 对应的监视腔的透射谱

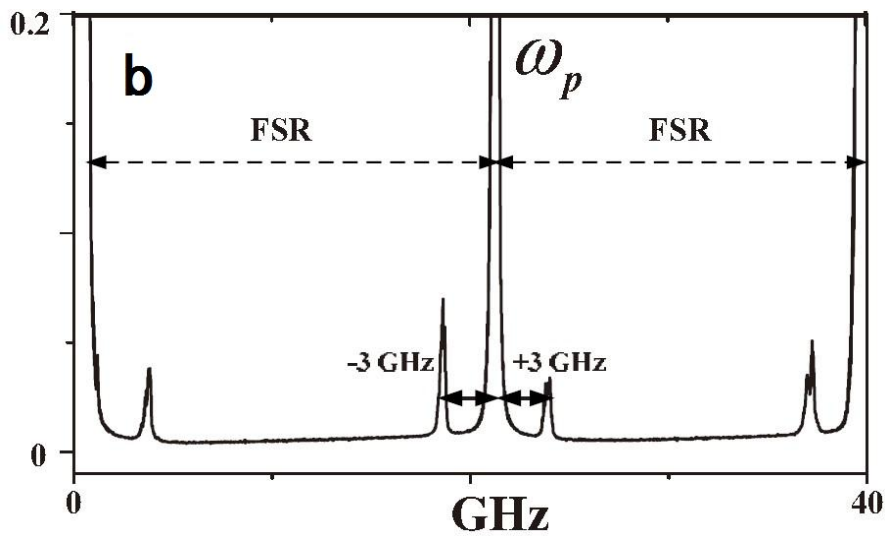


图 2.8.b. pump 光功率 100mW, 失谐与 2.6 图中 b 对应的监视腔的透射谱

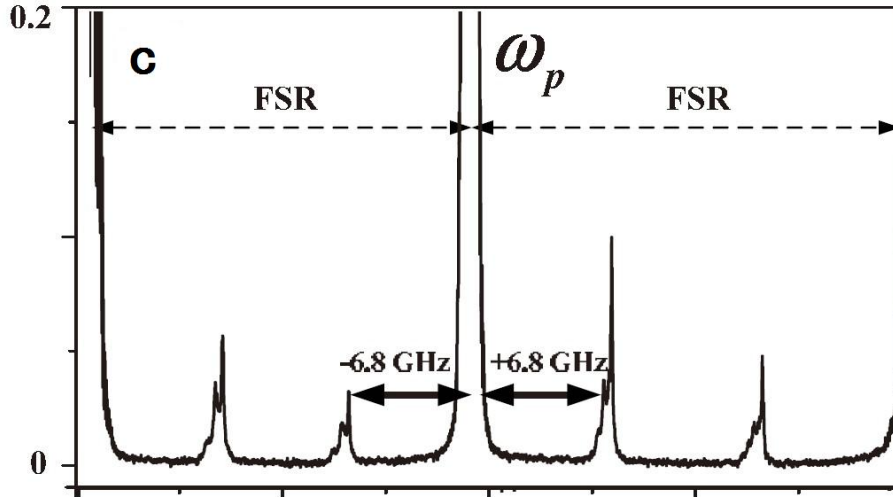


图 2.8.c. pump 光功率 100mW, 失谐与 2.6 图中 c 对应的监视腔的透射谱

图 2.8.a 对应 pump 光相对于铷 85 原子 D2 线 F=3-F' 跃迁线蓝失谐约 300MHz。

由于此时 anti-Stokes 光 (+3GHz) 在铷 85 原子 D2 线 F=2-F' 的吸收线范围内, 所以被强烈吸收, 不能在腔内形成振荡。而 Stokes 光 (-3GHz) 离铷 87D2 线 F=2-F' 的吸收线较远, 有较大增益, 输出功率约为 350 $\mu$ W。这对应 2.4.1 节中分析的内腔受激 Raman 过程。

图 2.8.b 对应 pump 光相对于铷 85 原子 D2 线 F=3-F' 跃迁线红失谐约 800MHz, 这时 Stokes 光 (-3GHz) 和 anti-Stokes 光 (+3GHz) 已都不在铷 85 和 87 原子 D2 线吸收线区域内, 两束光都有较大增益, 所以在腔内会形成三共振, OPO 效率约为 15%。Stokes 光的输出功率约为 430 $\mu$ W, anti-Stokes 光约为 170 $\mu$ W, 两者比值为 2.5, 与 2.4.2 节中的理论分析有一定差别, 这是因为此时腔已经调节到与 anti-Stokes 光共振, 所以抑制了 Stokes 光的增益。

图 2.8.c 对应 pump 光相对于铷 87 原子 D2 线 F=1-F' 跃迁线红失谐约为 3.2GHz, 此时 Stokes 光 (-6.8GHz) 和 anti-Stokes 光 (+6.8GHz) 都在铷 85 和 87 原子 D2 线吸收线范围以外, 所以在腔内也形成了三共振。由 pump 光失谐的位置可以计算得到  $a=-1.06$ , 由 2.59.a 式可得  $f=0.62(f^2=0.38)$ 。实验测得输出的 Stokes 光和 anti-Stokes 光功率分别为 240 $\mu$ W 和 610 $\mu$ W, OPO 效率 20%。两者比值约为 0.4, 与理论吻合。

在与图 2.8.c 对应的 pump 光失谐处, 我们也测量了 anti-Stokes 光的输出功率随注入 pump 光功率的变化, 如图 2.9 所示, 其阈值约为 30mW。

对以上的实验, 我们也研究了利用圆偏光激发跃迁的情况。将腔前的  $\lambda/2$  波片去掉, 换成  $\lambda/4$  波片, 其他相同。实验结果与线偏振光激发时的情况相同。

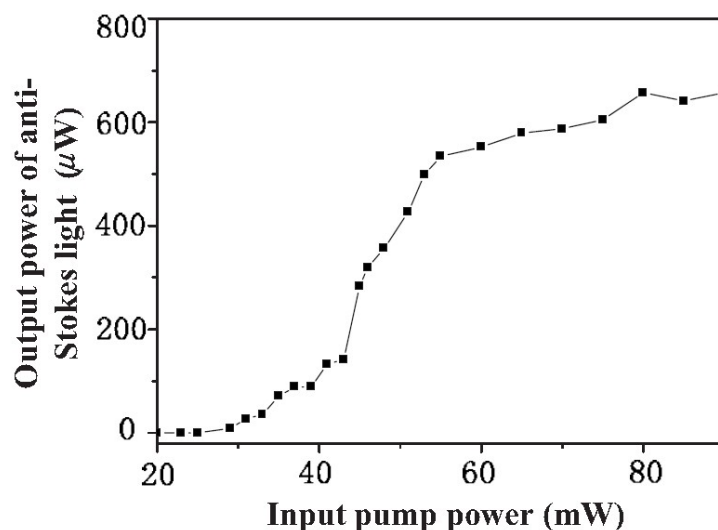


图 2.9 FWM 输出光随注入 pump 光功率变化

这里需要说明的是，在我们的实验中，腔镜为普通镀膜，无法弥补不同波长在腔内的色散，因此多个纵模很难在腔内同时共振。例如，以铷 85 原子 D2 线为例，如果 pump 光频率失谐到如 2.6 图 a 所示位置，腔也同时调节到与 pump 光共振，此时 Stokes 与其空腔时所对应的纵模最小频差 380MHz，已远大于腔的线宽 14MHz，即使考虑到吸收引起的腔的线宽加宽(在我们的实验中约为 40MHz)，Stokes 仍然不能与腔共振。在这里，借助于双光子振动所产生的非常大的色散，如前所述，来弥补这一频差，将腔的纵模平移到 Stokes 和 anti-Stokes 光的增益曲线范围内<sup>[2.19]</sup>，来实现腔内的多共振。



## 2. 6 小结

在本章中我们研究了内腔 FWM 过程，在理论上，利用半经典理论，通过绝热近似将三能级系统中的 FWM 过程等效到二能级系统中进行处理，简化了计算过程，并且利用内腔场 Maxwell 方程，分析了腔内的受激 Raman 过程和相干 anti-Stokes Raman 过程。实验上建立一套原子与腔的耦合系统，借助于腔增强作用，并利用双光子振动产生的大的色散，实验实现了腔内的双共振和三共振。

## 第二章 参 考 文 献

- [2.1] M.Poelker and P. Kumar. Sodium Raman laser: direct measurements of the narrow-band Raman gain. *Opt. Lett.* 1996, 17,399.
- [2.2] G. Grynberg, E. Giacobino, F. Biraben. Two-photon optically pumped laser. *Opt. Communications.* 1981, 36, 403.
- [2.3] Salim N. Jabr. Gain and noise characteristics of a continuous-wave Raman laser. *Opt. Lett.*, 1987, 12, 690.
- [2.4] X. W. Xia, W. J. Sandle, R. J. Ballagh and D.M. Warrington. Observation of cw stimulated Raman emission in the neon  $2p \rightarrow 1s$  manifold. *Opt. Communications.* 1993, 96, 99.
- [2.5] Franke, Peter; Feitisch, Alfred; Riehle, Fritz; Zhao, Kegung; Helmcke, Jürgen. Simultaneous cw laser emission including a Raman line of a He-Ne laser at six wavelengths in the visible range. *Appl. Opt.* 1989, 28, 3702.
- [2.6] M. C. Golomb, B. Fischer, J. Nilsen, J. O. White and A. Yariv. Laser with dynamic holographic intracavity distortion correction capability. *Appl. Phys. Lett.*, 1982, 41, 219.
- [2.7] H. J. Gerritsen. Nonlinear effects in image formation. *Appl. Phys. Lett.*, 1967, 10, 239.
- [2.8] R. M. Camacho, P. K. Vudyasetu and J. C. Howell. Four-wave-mixing stopped light in hot atomic rubidium vapour. *Nature Photonics*, 2009, 3, 103.
- [2.9] C. F. McCormick, V. Boyer, E. Arimodo and P. D. Lett. Strong relative intensity squeezing by 4-wave mixing in Rb vapor. *Opt. Lett.* 2007, 32, 178.
- [2.10] C. F. McCormick, A. M. Marino, V. Boyer and P. D. Lett. Strong low frequency quantum correlations from a four-wave-mixing amplifier. *Phys. Rev. A*, 2008, 78, 043816.
- [2.11] Q. Glorieux, L. Guidoni, S. Guibal, J. P. Likforman and T. Coudreau. Quantum correlations by four-wave mixing in an atomic vapor in a nonamplifying regime: Quantum beam splitter for photons. *Phys. Rev. A*, 2011, 84, 053826.
- [2.12] V. Boyer, A. M. Marino, R. C. Pooser and Paul D. Lett. Entangled Images from Four-WaveMixing. *Science.* 321, 544.
- [2.13] A. M. Marino, R. C. Pooser, V. Boyer and P. D. Lett. Tunable delay of Einstein–Podolsky–Rosen entanglement. *Nature*, 2009, 457, 859.
- [2.14] 张彦鹏, 瞬态相干相位共轭四波混频和六波混频光谱术.西安交通大学博士毕业论文, 2000.

- [2.15] Y. Shevy and M. Rosenbluh and H. Friedmann. Stimulated excited-state Raman scattering and three-photon scattering in sodium. 1986, 11, 85.
- [2.16] S. E. Harris, J. E. Field, and A. Imamoglu. Nonlinear optical processes using electromagnetically induced transparency. *Phys. Rev. Lett.* 1990, 64, 1107.
- [2.17] M. Jain, H. Xia, G. Y. Yin, A. J. Merriam and S. E. Harris. Efficient Nonlinear Frequency Conversion with Maximal Atomic Coherence. *Phys. Rev. Lett.*, 1996, 77, 4326.
- [2.18] L. S. Meng, P. A. Roos and J. L. Carlsten. Continuous-wave rotational Raman laser in H<sub>2</sub>. *Opt. Lett.*, 2002, 27, 1226.
- [2.19] P. A. Roos, L. S. Meng, S. K. Murphy, and J. L. Carlsten. Approaching quantum-limited cw anti-Stokes conversion through cavity-enhanced Raman-resonant four-wave mixing. *J. Opt. Soc. Am. B*, 2004, 21, 357.
- [2.20] S. Zaitsev, H. Izaki and T. Imasaka. Phase-Matched Raman-Resonant Four-Wave Mixing in a Dispersion-Compensated High-Finesse Optical Cavity. *Phys. Rev. Lett.*, 2008, 100, 073901.
- [2.21] H. Wu and M. Xiao. Bright correlated twin beams from an atomic ensemble in the optical cavity. *Phys. Rev. A*, 2009, **80**, 063415.
- [2.22] X. Yu, D. Xiong, H. Chen, P. Wang, M. Xiao and J. Zhang. Multi-normal-mode splitting of a cavity in the presence of atoms: A step towards the superstrong-coupling regime. *Phys. Rev. A*, 2009, 79, 061803(R).
- [2.23] H. Wu and M. Xiao. Cavity linewidth narrowing and broadening due to competing linear and nonlinear dispersions. *Opt. Lett.*, 2007, 32, 3122.
- [2.24] X. Yu, M. Xiao and J. Zhang. Triply-resonant optical parametric oscillator by four-wave mixing with rubidium vapor inside an optical cavity. *Appl. Phys. Lett.*, 2010, 96, 041101.

## 第三章 EIT 介质-腔系统的多正交模劈裂

### 3.1 引言

腔量子电动力学 (cavity-QED) 研究谐振腔中的原子与电磁场的相互作用。在强耦合条件下, 原子与腔场的能量交换速率大于由于系统与环境间的相互作用引起的衰减, 这种相干作用的增强克服了系统中各种消相干机制引起的原子和腔场之间相干度的降低, 这是实现量子信息过程的重要条件。因此强耦合是 cavity-QED 关心的重要内容, 一般以真空拉比劈裂作为原子-腔系统的强耦合的特征。

单原子与腔的耦合强度定义为  $g = \sqrt{\frac{\mu^2 \omega}{2\hbar \epsilon_0 V_M}}$ ,  $\mu$  为原子跃迁偶极矩,  $\omega$  为腔场的

的共振频率,  $V_M$  为腔模体积。一般强耦合条件要求  $g > \kappa/2, \Gamma/2$  ( $\kappa$  为腔的衰减率,  $\Gamma$  为原子的自发辐射率)。原子与腔场的耦合强度还可以用协同系数 (临界原子数  $N_0$  的倒数形式) 来表示<sup>[3.1]</sup>:

$$\eta = \frac{P_{\text{cavity}}}{P'_{\text{free}}} = \frac{24F}{\pi} \frac{1}{(k\omega^2)} = \frac{4g^2}{\kappa\Gamma} \quad (3.1)$$

其中  $P_{\text{cavity}}$  为原子向腔内散射的光功率,  $P'_{\text{free}}$  为原子向自由空间散射的光功率,  $F$  为腔的精细度,  $k$  为波矢,  $\omega$  为腔模腰斑半径。以协同系数表示的强耦合条件为  $\eta > 1$ , 物理上此时原子的自发辐射受到抑制, 因此向自由空间的散射减小, 而向腔内的散射增强<sup>[3.2,3.3,3.4]</sup>。从这个角度来看, 强耦合的条件很显然要弱于  $g > \kappa/2, \Gamma/2$ 。当然  $g > \kappa/2, \Gamma/2$  是较为苛刻的条件, 并非所有的过程都必须满足这样的条件, 不同的实验要求不尽相同。例如, 对于真空拉比劈裂, 两个劈裂峰的间距为  $2g$ , 峰的线宽为  $\frac{\kappa + \Gamma}{2}$ , 因此可分辨出两个劈裂峰的条件是:

$$R = \frac{4g}{\kappa + \Gamma} = \frac{2\sqrt{\eta}}{\sqrt{\frac{\kappa}{\Gamma}} + \sqrt{\frac{\Gamma}{\kappa}}} > 1 \quad (3.2)$$

上式表明产生真空 Rabi 劈裂的条件也并非必须是  $g > \kappa/2, \Gamma/2$ 。

对于 photon blockade 效应<sup>[3.5]</sup>, 表征其非经典特征的二阶关联函数在零时间取值小于 1<sup>[3.6]</sup>:

$$g^{(2)}(\tau=0) \approx \frac{9(\kappa+\Gamma)^2}{4g^2} = \frac{9(\sqrt{\frac{\kappa}{\Gamma}} + \sqrt{\frac{\Gamma}{\kappa}})^2}{4\eta} < 1 \quad (3.3)$$

而对于单光子非线性和单原子非线性过程则仅要求  $g > \kappa/2$  和  $g > \Gamma/2$  既可。

这些过程中弱化了对强耦合条件的要求，但是对于单原子开关则要求  $g^2 > \kappa\Gamma/4$  或  $\eta > 1$ ，而光子数态滤波则要求  $Ng^2 \gg \kappa\Gamma/4$  或  $N\eta \gg 1$ <sup>[3.7]</sup>。一般在实际的实验中总是要设法提高耦合强度，以期更接近理想的实验条件，得到较好的实验结果。如何增加耦合强度？可以利用超导或镀膜技术减小腔场的衰减，同时采用微腔减小腔模的体积。另一个办法，就是利用多原子来增加耦合强度。多原子系统的耦合强度为  $\sqrt{N}g$  ( $N$  为腔模内的原子数)，这比单原子系统的耦合强度的增加了  $\sqrt{N}$  倍。虽然并非线性关系，但是大的粒子数密度可以使耦合强度增加几个数量级甚至更多。对于多原子体系，人们通常认为，众多的原子数目会增加自发辐射，同时由于原子间碰撞的增加带来了不稳定性。但是事实与此相反，多原子体系不仅提高了系统的稳定性，并且使相干辐射增强。这是因为，首先集体激发态对原子的损失不敏感，所以其稳定性更高；另外集体激发态  $|E^N\rangle$  与  $|E^{N+1}\rangle$  的耦合以系数  $\sqrt{N+1}$  增加，即超辐射<sup>[3.8]</sup>---在弱激发条件下，体系中的原子相干地辐射到同一模式。因此利用多原子系统也是很好的选择方案。

随着实验技术的进步，一些小组将腔的精细度提高到了几十万甚至上百万，腔的长度减小到了一百到几十个微米<sup>[3.9,3.10]</sup>。另一方面一些小组利用多原子体系增加耦合强度，MIT 的 Vladan 小组利用一个长为 1.3cm 精细度为  $6 \times 10^4$  的腔将  $10^5$  个原子束缚在腔内<sup>[3.11]</sup>。为了避免 Doppler 扩展的影响，一般人们倾向于冷原子介质。而阿肯色的 Xiao Min 小组搭建了一个由环形腔和热原子构成的系统，其空腔精细度仅为 50，但是其环形腔结构在很大程度上解决了 Doppler 扩展的影响，而且在室温或更高温度可以得到很高的原子数密度，因此也可以实现强耦合<sup>[3.12]</sup>。

Meiser 和 Meystre 从理论上研究了一个新的耦合强度区域<sup>[3.13]</sup>，即当耦合强度接近或甚至大于一个自由光谱区的情况，并将其命名为超强耦合条件。2010 年我们小组利用热原子和一个长为 17cm 的 FP 腔和热原子系统，从实验上实现了原子与腔的超强耦合，并且观察到在超强耦合条件下，不仅与原子跃迁线共振的腔模会发生正交模劈裂而且邻近的其他腔模也会发生分裂的现象<sup>[3.14]</sup>。在本章中我们对由 EIT 介质

与腔构成的系统，在超强耦合条件下透射谱的特性进行了相应的理论分析<sup>[3.15]</sup>。在 probe 光较弱和 control 光也不是很强的条件下，忽略 Kerr 非线性和其他非线性效应（四波混频等）的影响，利用线性色散理论<sup>[3.16]</sup>分析了 EIT 介质与腔所构成系统的透射谱。通过理论分析，我们发现在超强耦合条件下，不仅与原子跃迁线共振腔模分裂为三峰结构---两个正交模劈裂峰和由 EIT 引起的中间透射峰，而且临近腔模也会分裂为三峰结构，并且位于 EIT 透明窗口处的透射峰线宽由于 EIT 介质的强烈色散而被显著压窄<sup>[3.17]</sup>。

### 3. 2 理论分析

1963 年 Jaynes 和 Cummings 理论分析了单个二能级原子和量子化场的相互作用<sup>[3.21]</sup>, 即 J-C 模型。在 1990 年 Yifu Zhu 给出的经典的线性色散理论也很好的解释了真空 Rabi 劈裂现象<sup>[3.16]</sup>。在本章的理论分析中, 我们从光与原子相互作用的半经典理论出发, 利用线性色散理论, 分析 EIT 介质与腔系统在超强耦合强度下的透射谱。

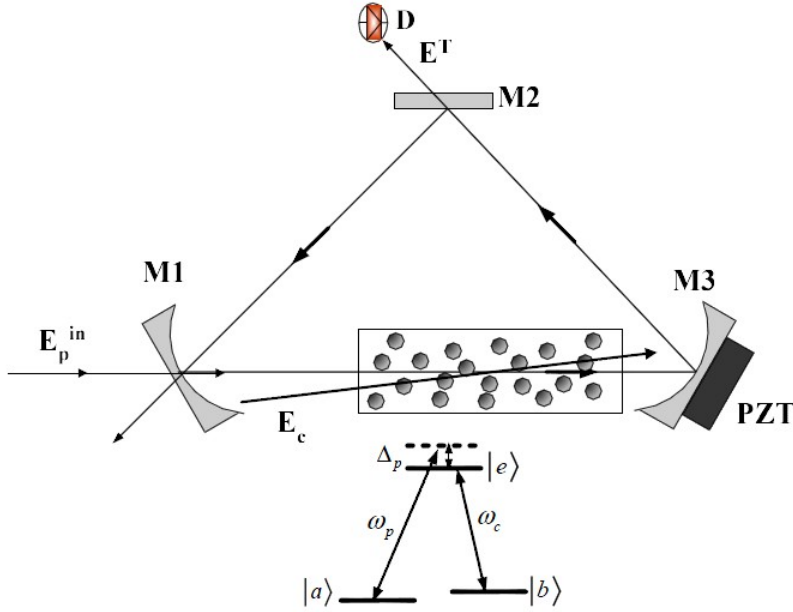


图 3.1 环形腔与三能级原子系统装置图

如图 3.1 所示, 一个长为  $L$  的三镜环形腔,  $M1$  和  $M3$  为小角度反射的平凹镜, 其反射率(透射率)分别为  $r_1$ 、 $r_3$  ( $t_1$ 、 $t_3$ ), 满足关系  $t_{1,3}^2 + r_{1,3}^2 = 1$ 。两平凹镜的曲率半径为 50mm。 $M2$  为大角度反射的平面镜, 其反射率(透射率)为  $r_2$  ( $t_2$ )。其中  $M1$  为入射镜,  $M2$  为出射镜。该腔的自由光谱区  $\Delta_{FSR} = \frac{c}{L}$ , 精细度  $F = \frac{\pi\sqrt{r_1 r_2}}{1 - r_1 r_2}$ , 线宽  $\Delta\nu = \frac{\Delta_{FSR}}{F}$ ,

腔内光子的衰减率为  $\kappa = 2\pi\Delta\nu$ 。在腔模腰斑处放置的  $\Lambda$  型三能级原子蒸气室长为  $l$ , 一束较弱的 probe 光从腔镜  $M1$  处耦合进入腔内, 另一束较强的 control 光沿与轴小角度方向入射, 和 probe 光同向传播。  $|a\rangle$  和  $|b\rangle$  为原子的两个基态,  $|e\rangle$  为激发态。

腔模与从  $|a\rangle$  到  $|e\rangle$  的跃迁耦合, 失谐为  $\Delta_{ac}$ , probe 光相对于  $|a\rangle$  到  $|e\rangle$  的跃迁线的失谐为  $\Delta_p$ , control 光与  $|b\rangle$  到  $|e\rangle$  跃迁线相互作用, 失谐为  $\Delta_c$ 。腔镜  $M3$  固定在 PZT 上, 用以改变腔的长度, 调节腔模与原子跃迁线  $|a\rangle$  到  $|e\rangle$  的失谐  $\Delta_{ac}$ 。探测器  $D$  用来测量

系统的透射谱。对于含有吸收和色散介质的环形腔的强度透射函数为：

$$T(\omega_p) = |t(\Delta_p)|^2 = \frac{t_1 t_2 \exp(-\alpha l)}{[1 - r_1 r_2 \exp(-\alpha l / 2)]^2 + 4 r_1 r_2 \exp(-\alpha l / 2) \sin^2[\phi(\omega_p) / 2]} \quad (3.4)$$

其中， $\alpha l$  为介质对腔场的单次强度吸收， $\Delta_p = \omega_p - \omega_{ae}$  为 probe 相对于原子跃迁线  $|a\rangle - |e\rangle$  的失谐量， $\Delta_{ac} = \omega_c - \omega_{ae}$  为腔模相对于原子跃迁线  $|a\rangle - |e\rangle$  的失谐量。强度吸收系数  $\alpha$ 、折射率  $n$  和腔场的单次循环相移  $\phi(\omega_p)$  定义为：

$$\alpha = 2 \frac{\omega_{ae}}{c} \text{Im}(\sqrt{1 + \chi}) \quad (3.5)$$

$$n = \text{Re}(\sqrt{1 + \chi}) \quad (3.6)$$

$$\phi(\Delta) = \frac{2\pi(\Delta_p - \Delta_{ac})}{\Delta_{FSR}} + \frac{(n-1)\omega_p l}{c} \quad (3.7)$$

3.5 和 3.6 式中  $\chi$  为 EIT 介质的电极化率。

假设所有原子都处于静止状态 ( $\vec{v} = 0$ )，这里我们不考虑 Doppler 扩展的影响。 $\Lambda$ -type 三能级原子介质与 control 光和 probe 光两个光场的作用，在相互作用表象下，通过偶极近似和旋波近似，系统的 Hamiltonian 可以写为：

$$\hat{H}_{\text{int}} = -\hbar \Delta_p |e\rangle \langle e| - \hbar(\Delta_p - \Delta_c) |b\rangle \langle b| - \frac{\mu_{ea} E_p}{2} |e\rangle \langle a| - \frac{\hbar \Omega_c}{2} |e\rangle \langle b| + h.c. \quad (3.8)$$

其中  $\Delta_c = \omega_c - \omega_{be}$  为 control 光相对  $|b\rangle$  到  $|e\rangle$  的失谐量， $\mu_{ea}$  为  $|e\rangle - |a\rangle$  能级间跃迁的偶极矩， $\Omega_c = -\mu_{eb} E_c / \hbar$  分别为 control 光的 Rabi 频率， $E_p$  为内腔 probe 光的电场强度。考虑到自发辐射和其他过程引起不可逆的衰减项，密度矩阵的运动方程写为：

$$\frac{\partial \rho_{nm}}{\partial t} = \frac{-i}{\hbar} [\hat{H}, \rho]_{nm} - (\frac{\partial \rho_{nm}}{\partial t})_{\text{inc}} \quad (3.9)$$

因此可得：

$$\dot{\rho}_{ea} = -(\gamma_{ea} - i\Delta_p) \rho_{ea} + \frac{i}{2} \Omega_c \rho_{ba} - \frac{i\mu_{ea} E_p}{2\hbar} (\rho_{ee} - \rho_{aa}) \quad (3.10.a)$$

$$\dot{\rho}_{ba} = -[\gamma_{ba} - i(\Delta_p - \Delta_c)] \rho_{ba} + \frac{i}{2} \Omega_c^* \rho_{ea} - \frac{i\mu_{ea} E_p}{2} \rho_{be} \quad (3.10.b)$$

$$\dot{\rho}_{be} = -(\gamma_{eb} + i\Delta_c) \rho_{be} + \frac{i}{2} \Omega_c^* (\rho_{bb} - \rho_{ee}) - \frac{i\mu_{ea} E_p^*}{2} \rho_{ba} \quad (3.10.c)$$

其中， $\rho_{nm}$  为密度矩阵元， $\gamma_{ea}$  和  $\gamma_{eb}$  分别为由激发态  $|e\rangle$  到基态  $|a\rangle$  和  $|b\rangle$  的自发辐射率，



$\gamma_{ba}$  为无辐射跃迁速率。在稳态条件下，由于  $|E_p| \ll |E_c|$ ，所以假设绝大部分原子处于基态，因此由 3.10.a 和 3.10.b 式可得：

$$(\gamma_{ea} - i\Delta_p)\rho_{ea} = \frac{i}{2}\Omega_c\rho_{ba} - \frac{i\mu_{ea}E_p}{2\hbar}(\rho_{ee} - \rho_{aa}) \quad (3.11.a)$$

$$\begin{aligned} \rho_{ba} &= \frac{i}{2} \frac{\Omega_c^*}{\gamma_{ba} - i(\Delta_p - \Delta_c)} \rho_{ea} - \frac{i}{2\hbar} \frac{\mu_{ea}E_p}{\gamma_{ba} - i(\Delta_p - \Delta_c)} \rho_{be} \\ &\simeq \frac{i}{2} \frac{\Omega_c^*}{\gamma_{ba} - i(\Delta_p - \Delta_c)} \rho_{ea} \end{aligned} \quad (3.11.b)$$

将 3.11.b 式代入 3.11.a 式：

$$\rho_{ea} = \frac{i}{2\hbar} \frac{\mu_{ea}E_p(\rho_{ee} - \rho_{aa})}{\gamma_{ea} - i\Delta_p + \frac{|\Omega_c|^2/4}{\gamma_{ba} - i(\Delta_p - \Delta_c)}} \quad (3.12)$$

介质在电场的作用下被极化，宏观极化强度为  $P = \chi\varepsilon_0 E \exp(-i\omega t)$ ，而极化强度由密度矩阵元定义为： $P = 2N_a\mu\rho \exp(-i\omega t)$ ，所以 EIT 介质的极化率为：

$$\begin{aligned} \chi &= \frac{i\mu_{ea}^2 N_a}{\hbar\varepsilon_0} \frac{1}{\gamma_{ea} - i\Delta_p + \frac{|\Omega_c|^2/4}{\gamma_{ba} - i(\Delta_p - \Delta_c)}} \\ &= \frac{i3\pi c^3 N_a}{\omega_{ea}^3} \frac{\gamma_{ea}}{\gamma_{ea} - i\Delta_p + \frac{|\Omega_c|^2/4}{\gamma_{ba} - i(\Delta_p - \Delta_c)}} \end{aligned} \quad (3.13)$$

$N_a$  为处于腔模内的原子数密度。一般腔模所张立体角非常小，因此处于腔膜内的原子横向衰减速率近似等于自由空间的原子的自发辐射率  $\gamma = \frac{\mu^2\omega}{3\pi\hbar\varepsilon_0 c^3}$ 。在  $|\chi| \ll 1$  时，原

子的吸收系数 3.5 式和折射率 3.6 式改写为：

$$\alpha = \frac{\omega_{ea}}{c} \text{Im}(\chi) \quad (3.14)$$

$$n = 1 + \text{Re}(\chi)/2 \quad (3.15)$$

下面对原子与腔的耦合系统的透射谱进行分析。考虑一个长为 35cm 的环形腔，输入镜 M1 和输出镜 M2 的强度透射率为 2%，M3 的反射率假设接近 100%，则该环形腔的自由光谱区  $\Delta_{FSR} = 856\text{MHz}$ ，精细度为  $F=154$ ，线宽为 5.6MHz，腔的衰减率  $\kappa = 2\pi \times 5.6\text{MHz}$ 。假设原子的衰减率  $\gamma_{ea} = 2\pi \times 6\text{MHz}$ 、 $\gamma_{ba} = 2\pi \times 10\text{kHz}$ 。

### 3. 2. 1 二能级原子-腔系统的透射谱

首先看一下  $\Omega_c = 0$  时的情况，即没有 control 光时，如果  $\sqrt{N}g \ll \omega_{ba}$ ，可以忽略其他跃迁耦合的影响，则该系统可视为理想的二能级原子介质与腔构成的系统。

如图 3.2 所示为增大耦合强度（即原子数， $g \sim \sqrt{N}g$ ，如果介质体积不变，则为粒子数密度）时，二能级原子-腔系统的透射谱。其中左边为透射谱，黑色实线为二能级原子-腔系统的透射谱，蓝色虚线为空腔的透射谱，右边为与左边对应的避免交叉图，蓝点对应透射峰的位置，粉色虚线为二能级原子-腔系统的相移函数曲线。图 a、b、c 和 d 对应的理论计算参量  $N_a l$  分别为  $3.15 \times 10^{15} \text{ m}^{-2}$ 、 $3.15 \times 10^{16} \text{ m}^{-2}$ 、 $7.85 \times 10^{16} \text{ m}^{-2}$  和  $1.77 \times 10^{17} \text{ m}^{-2}$ ，对应的耦合强度  $\sqrt{N}g$  分别为  $2\pi \times 250 \text{ MHz}$ 、 $2\pi \times 800 \text{ MHz}$ 、 $2\pi \times 1280 \text{ MHz}$  和  $2\pi \times 1920 \text{ MHz}$ 。由图可以看出对于空腔纵模为洛伦兹型，以自由光谱区为单位等间隔分布，其相移函数对应  $\phi(\Delta) = \pm m\pi$ ， $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ 。而对于二能级原子与腔的耦合系统，透射谱受到显著调制，而使腔模不再等间距分布。在强耦合条件下，与原子跃迁共振的腔模  $m=0$ ，分裂为两个较小的正交纵模， $m' = 0_1$  和  $m' = 0_2$ ，其位置分别位于  $\pm \sqrt{N}g$  处。随着耦合强度的继续增加，在超强耦合强度条件下，即当  $\sqrt{N}g$  接近或大于  $\Delta_{FSR}$  时，不仅共振腔模会产生劈裂，相邻的纵模也会分裂。图 c 中，可以很清楚的看到邻近  $m=0$  的两个纵模  $m=-1$  和  $m=+1$  分别劈裂为  $m' = -1_{1,2}$  和  $m' = +1_{1,2}$  两对正交模，由于相对于原子跃迁线有很大的失谐，因此劈裂峰的位置是不对称的，并且靠近原子跃迁线的峰会强烈吸收，而出现高度的不对称。图 d 中，当耦合强度继续增加，其他相邻纵模  $m = \pm 2$  和  $m = \pm 3$  分别劈裂为  $m' = \pm 2_{1,2}$  和  $m' = \pm 3_{1,2}$ 。这正是二能级原子腔系统在超强耦合强度下的多正交模劈裂现象<sup>[3,14]</sup>。

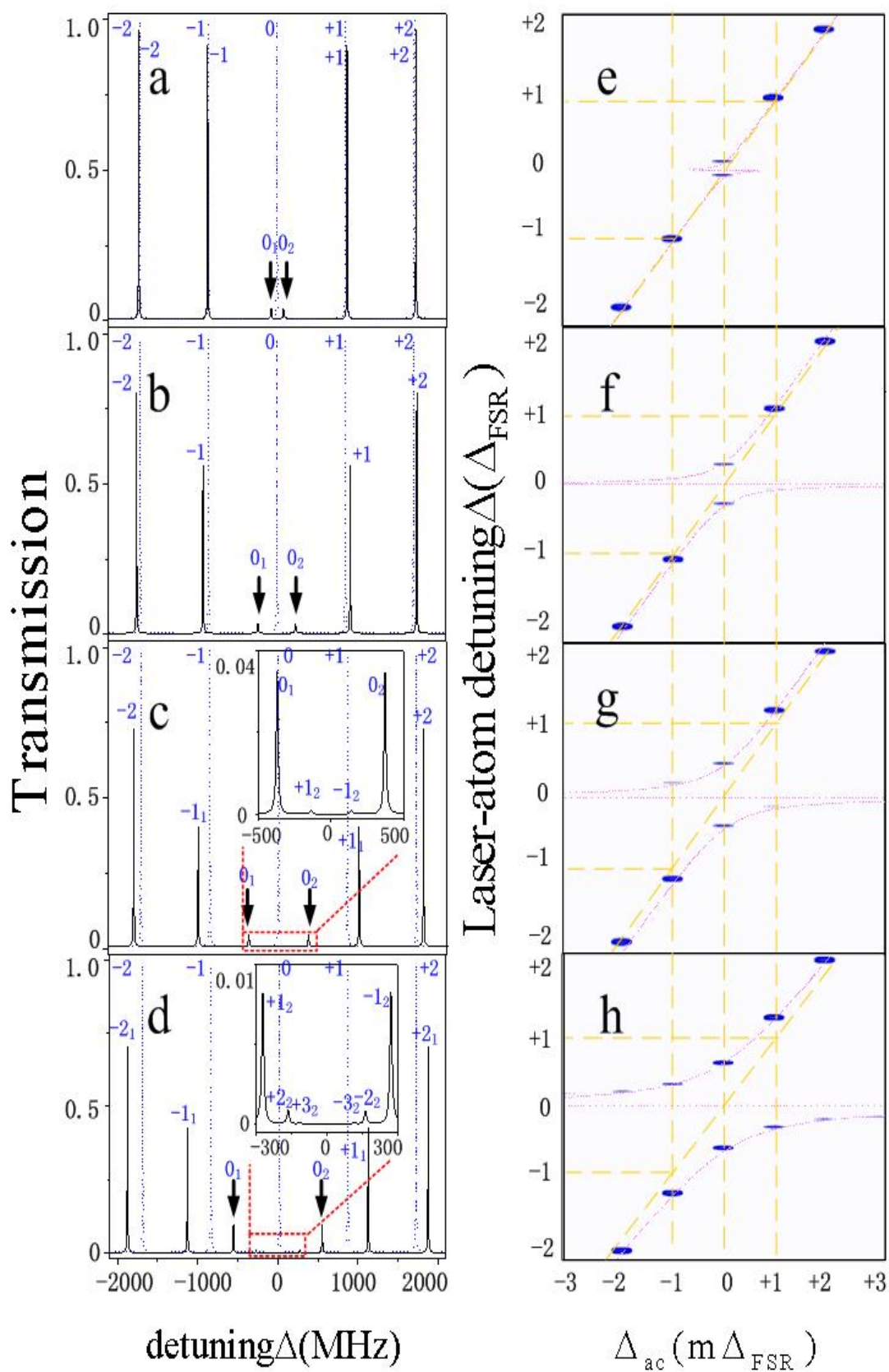


图 3.2 二能级原子-腔系统的透射谱

### 3. 2. 2 三能级原子-腔系统的透射谱

如果将 control 光打开, 并且我们假设  $\Omega_c \gg \mu_{ea} E_p / \hbar$ , 该 EIT 介质-腔系统的透射谱如图 3.3 所示。图中左面为透射谱, 右面为对应的避免交叉图, 图的结构与 3.2 图相同。理论计算中  $\Omega_c = 2\pi \times 60\text{MHz}$ , 其他参数与二能级原子介质时的情况相同。在强耦合条件下, 由 e 图可以看出, 此时相移曲线与水平轴有三个交点,  $\phi(\Delta) = 0$  有三个解, 原来的纵模  $m=0$ , 劈裂为三个  $m' = 0_1$ 、 $m' = 0_2$  和  $m' = 0_3$ , 其中  $m' = 0_1$  和  $m' = 0_2$  对应两个正交模劈裂峰, 其位置在  $\pm\sqrt{Ng^2 + |\Omega_c|^2} / 4$  处, 位于中间的  $m' = 0_3$  对应 EIT 的透射峰。

随着耦合强度的增大, 当  $\sqrt{N}g$  接近或大于  $\Delta_{FSR}$  时, 相移函数  $\phi(\Delta) = +\pi$  ( $\phi(\Delta) = -\pi$ ) 也会有三个解,  $m=1$  ( $m=-1$ ) 分裂为  $m' = 1_1, 1_2, 1_3$  ( $m' = -1_1, -1_2, -1_3$ ), 即与共振纵模相邻的  $m = \pm 1$  劈裂为三个, 如图 b 和 f 所示。其中  $m' = \pm 1_1, \pm 1_2$  为对应纵模  $m = \pm 1$  的正交模劈裂峰,  $m' = \pm 1_3$  为相应  $m = \pm 1$  纵模的 EIT 透射峰。如果继续增加耦合强度, 其他近邻纵模也会发生正交模劈裂, 如图 c 和 d 所示,  $m = \pm 2$  和  $m = \pm 3$  分别劈裂为  $m = \pm 2_1, \pm 2_2, \pm 2_3$  和  $m = \pm 3_1, \pm 3_2, \pm 3_3$ 。

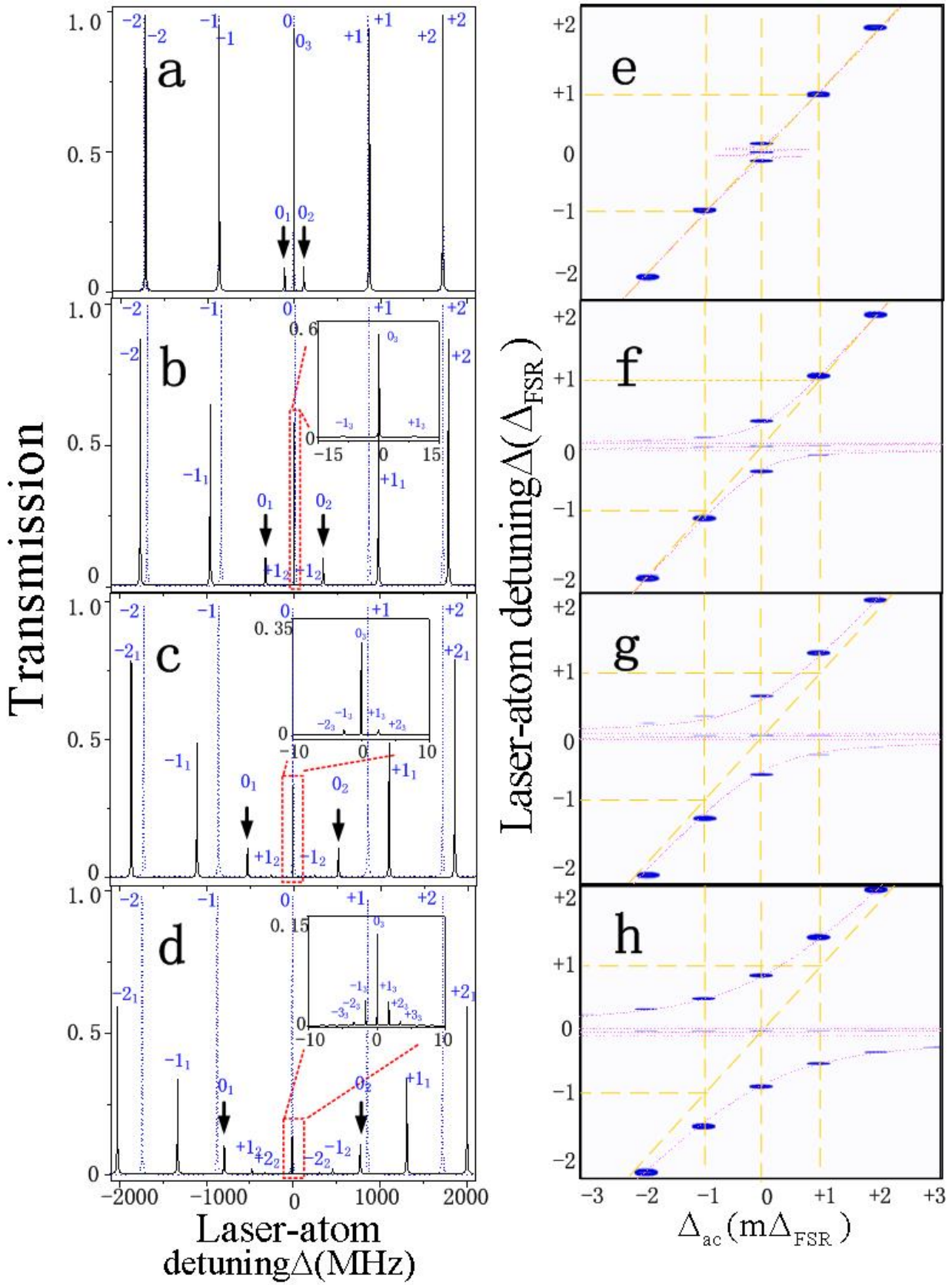


图 3.3 三能级原子-腔系统的透射谱

### 3. 2. 3 三能级原子-腔系统的线宽特征

对于介质-腔系统，由于介质的色散和吸收作用会使腔的线宽受到显著影响<sup>[3.17,3.22-3.27]</sup>。通过调节 probe 光失谐和功率，EIT 介质腔的线宽会被压窄或加宽。在弱光条件下，处于 EIT 透明窗口的共振腔模线宽被压窄<sup>[3.17,3.23]</sup>，可以认为是由于慢光提高了光子在腔内的寿命<sup>[3.24,3.27]</sup>。而在 probe 较强时，由于非线性 Kerr 效应的作用，在合适的 probe 的失谐条件下，非线性 Kerr 效应引起的色散与线性色散符号相反，由此产生的快光会增加光子从腔内溢出的几率，所以此时腔的线宽被加宽<sup>[3.27]</sup>，形成所谓的“白光腔”（White-light cavity）<sup>[3.28]</sup>。

由图 3.3 可以看出，在强耦合条件下，位于中心区域内的透射峰的线宽明显变窄，原因是在 EIT 透明窗口内介质色散的剧烈变化，因此使原来空腔的色散特性显著改变，而影响透射峰的线宽。对于介质-腔系统，由相移函数 3.4 式可以得到介质腔的纵模频移<sup>[3.17,3.22]</sup>：

$$\omega_m = \frac{1}{1+\beta} \omega_e + \frac{\beta}{1+\beta} \omega_{ea} \quad (3.16)$$

其中， $\omega_m$  为介质腔的纵模频率， $\omega_e$  空腔的纵模频率， $\omega_{ea}$  腔内的原子从  $|a\rangle$  到  $|e\rangle$  的跃迁频率， $\beta$  定义为：

$$\beta = \omega_m \frac{l}{2L} \frac{\partial \chi'}{\partial \omega_p} \quad (3.17)$$

由介质的色散、吸收及腔镜和其他损耗决定。根据 3.4 式可求出介质腔的线宽为：

$$\Delta \nu_m = \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{1-r_1 r_2 \exp(-\alpha l)}{\exp(\frac{-\alpha l}{2})(1-r_1 r_2)} \frac{1}{1+\beta} 2\pi \Delta \nu_0 \right] \quad (3.18)$$

如果我们只考虑位于 EIT 透明窗口内的透射峰的线宽，也即 probe 小失谐时，3.13 式中电极化率可近似为：

$$\chi = \frac{i3\pi c^3 N_a \gamma_{ea} (\gamma_{ba} - i\Delta_p)}{\omega_{ea}^3 |\Omega_c|^2 / 4} \quad (3.19)$$

所以电极化率的实部和虚部分别为：

$$\chi' = \text{Re}(\chi) = \frac{3\pi c^3 N_a \gamma_{ea} \Delta_p}{\omega_{ea}^3 |\Omega_c|^2 / 4} \quad (3.20.a)$$

$$\chi'' = \text{Im}(\chi) = \frac{3\pi c^3 N_a}{\omega_{ea}^3} \frac{\gamma_{ea}\gamma_{ba}}{|\Omega_c|^2/4} \quad (3.20.b)$$

将 3.20.a 式代入 3.17 式可得：

$$\beta = \omega_m \frac{l}{2L} \frac{\partial \chi'}{\partial \Delta \nu_p} \approx \omega_m \frac{3\pi c^3 N_a}{\omega_{ea}^3} \frac{l}{2L} \frac{\gamma_{ea}}{|\Omega_c|^2/4} \quad (3.21)$$

这里我们只考虑与跃迁线共振的腔模，由 3.16 式所以有： $\omega_m = \omega_e = \omega_{ea}$ ，因此 3.21 式变为：

$$\beta = \frac{3\pi c^3 N_a}{\omega_{ea}^2} \frac{l}{2L} \frac{\gamma_{ea}}{|\Omega_c|^2/4} \quad (3.22)$$

同时由 3.20. b 可以得到介质对共振腔模的吸收系数为：

$$\alpha = \frac{3\pi c^2 N_a}{\omega_{ea}^2} \frac{\gamma_{ea}\gamma_{ba}}{|\Omega_c|^2/4} \quad (3.23)$$

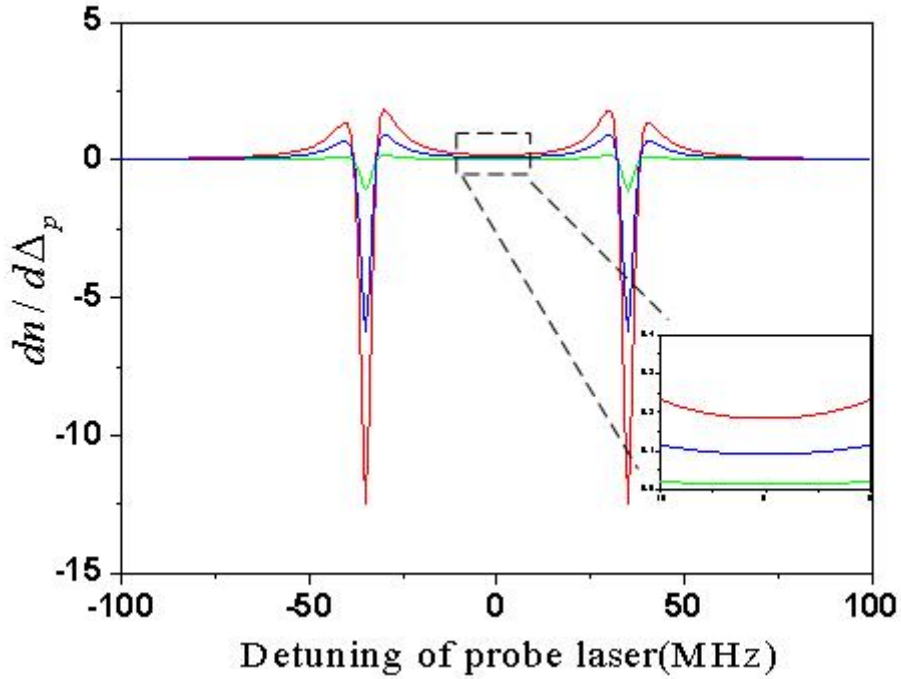
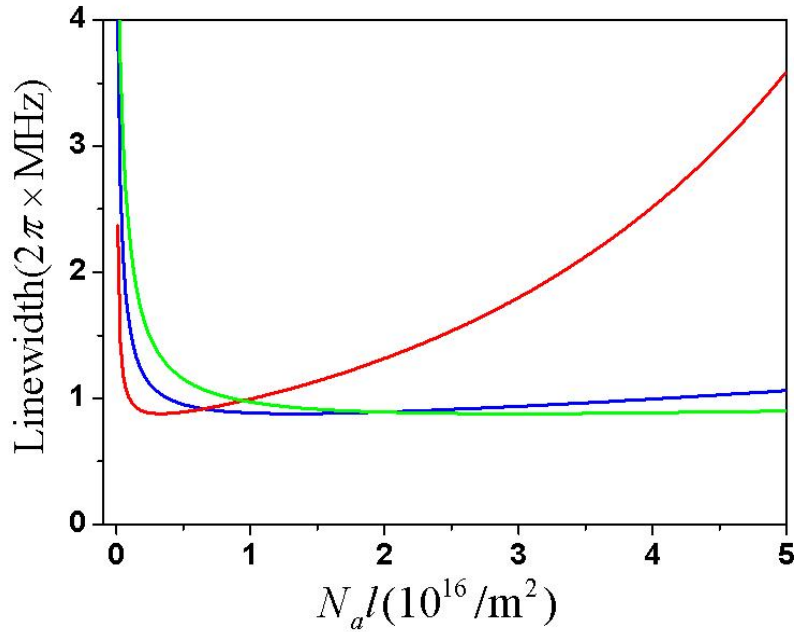


图 3.4 在不同粒子数密度下，EIT 介质  $dn/d\Delta_p$  随 probe 失谐的变化曲线

图 3.4 为 EIT 介质的折射率对 probe 光失谐的导数  $dn/d\Delta_p$  随 probe 光失谐的变化曲线，其中红色、蓝色和绿色实线对应参量  $N_a l$  的值分别为： $3.15 \times 10^{16} \text{ m}^{-2}$ 、 $7.85 \times 10^{16} \text{ m}^{-2}$  和  $1.77 \times 10^{17} \text{ m}^{-2}$ 。右下角的小图是 probe 光失谐在 -10MHz 到 10MHz 的

放大图, 从该图可以看出, 当 probe 光在共振处失谐很小时,  $dn/d\Delta_p$  近似可以看做常数, 且有:

$$\frac{dn}{d\Delta_p} = \frac{1}{2} \frac{d\chi'}{d\Delta_p} \quad (3.24)$$

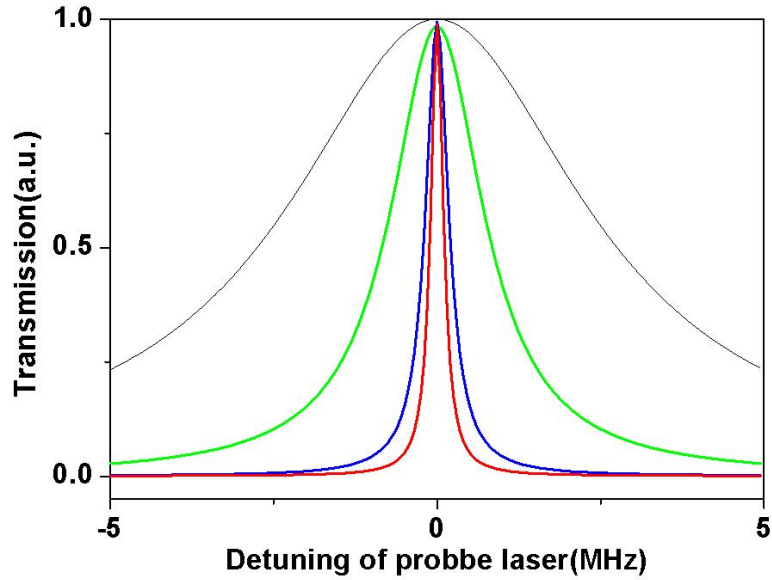


3.5  $m=0_3$  纵模线宽随  $N_a l$  变化的曲线

图 3.5 给出了在不同的 control 光强下, 共振腔模  $m=0_3$  的线宽随粒子数密度变化的曲线, 其中红线、蓝线和绿线分别对应的 control 光的 Rabi 频率为  $2\pi \times 30\text{MHz}$ 、 $2\pi \times 60\text{MHz}$  和  $2\pi \times 90\text{MHz}$ 。在 EIT 透明窗口处介质的吸收非常小, 当  $\beta > 1$  时, 透射谱受到与色散变化率相关的  $1/(1+\beta)$  因子的影响, 所以中间透射峰线宽显著变窄。但是同时我们可以注意到在粒子数密度大于某个值以后, 线宽有增大的趋势, 如红线和蓝线所示, 这主要是由于在大粒子数密度下, 介质的吸收迅速增加的原因。如果增大 control 光的 Rabi 频率, 由 3.23 式, 介质的吸收减小, 所以透射峰的线宽变大的趋势变缓, 如绿线所示。但是在低粒子数密度下, control 光 Rabi 频率越小, 透射峰线宽反而越小。其原因是在较低的粒子数密度条件下, 增加 control 光的 Rabi 频率会使色散的变化率  $d\chi'/d\Delta_p$  变小, 即减小了  $1/(1+\beta)$  因子, 相对于介质吸收的权重, 此时色散的影响较大, 所以 control 光 Rabi 频率越小, 透射峰线宽越小。而粒子数密度较大时, 情况相反。



图 3.6 为共振腔模  $m = 0_3$  在不同  $N_a l$  时的透射谱，其中黑线为空腔的透射峰，绿线、蓝线和红线分别对应的参量  $N_a l$  数值为： $3.15 \times 10^{16} \text{ m}^{-2}$ 、 $7.85 \times 10^{16} \text{ m}^{-2}$  和  $1.77 \times 10^{17} \text{ m}^{-2}$ ，control 光的 Rabi 频率为  $2\pi \times 60 \text{ MHz}$ 。



3.6 中心透射峰线宽随  $N_a l$  变化的曲线

### 3.3 小结

本章中我们理论分析了 EIT 介质-腔系统在超强耦合区域的透射谱。在超强耦合条件下，共振腔模以及临界腔模都会发生多正交模劈裂现象，形成三峰结构，并且位于 EIT 透明窗口处的透射峰的线宽会被压窄。

### 第三章 参考文献

- [3.1] H. T. Suzuki, I. D. Leroux, M. H. S. Smith, M. Cetina, A. Grier, J. Simon, and V. Vuletic. Interaction Between Atomic Ensembles and Optical Resonators: Classical Description. Arxiv:quantph/1104.3594., 2011.
- [3.2] P. L. Knight and P. W. Milonni. Spontaneous Emission Between Mirrors. *Opt. Communication*, 1973, 9, 119.
- [3.3] G. Feher, et.al. Spontaneous Emission of Radiation from an Electron Spin System. *Phys. Rev.*, 1958, 109, 221.
- [3.4] R. G. Hulet, E. S. Hilfer and D. Klepper. Inhibited Spontaneous Emission by a Rydberg Atom. *Phys. Rev. Lett.*, 1985, 55, 2137.
- [3.5] K. M. Birnbaum, A. Boca, R. Miller, A. D. Boozer, T. E. Northup, and H. J. Kimble. Photon blockade in an optical cavity with one trapped atom. *Nature*, 2005, 436, 87.
- [3.6] R. J. Brecha, P. R. Rice, and M. Xiao. N two-level atoms in a driven optical cavity: Quantum dynamics of forward photon scattering. *Phys. Rev. A*, 1999, 59, 2392.
- [3.7] G. Nikoghosyan and M. Fleischhauer. Photon-number selective group delay in cavity induced transparency. *Phys. Rev. Lett.*, 2010, 105, 013601.
- [3.8] R. H. Dicke. Coherence in Spontaneous Radiation Processes. *Phys. Rev.*, 1954, 93, 99.
- [3.9] 李刚, 高精度微光学腔及单原子的控制与测量, 山西大学博士毕业论文, 2007.
- [3.10] G. Rempe, R. J. Thompson and H. J. Kimble. Measurement of Ultralow losses in an optical interferometer. *Opt. Lett.*, 1992, 17, 363.
- [3.11] H. T. Suzuki, W. Chen, R. Landig, J. Simon, V. Vuletic. Vacuum-Induced Transparency. 2011, *Science*, 333, 1266.
- [3.12] H. Wu, J. G. Banacloche, and M. Xiao. Observation of intracavity electromagnetically induced transparency and polariton resonances in a Doppler-broadened medium. *Phys. Rev. Lett.*, 2008, 100, 173602.
- [3.13] W. E. Lamb. Theory of an optical master. *Phys. Rev.*, 1964, 134, A1429.
- [3.14] W. R. Bennett. Hole burning effect in a He-Ne optical master. *Phys. Rev.*, 1962, 126, 580.
- [3.15] J. G. Banacloche, Y. Q. Li, S. Z. Jin and M. Xiao. Electromagnetically induced transparency in ladder-type inhomogeneously broaden media: Theory and experiment. *Phys. Rev. A*, 1995, 51, 576.

- [3.16] D. Meiser and P. Meystre. Superstrong coupling regime of cavity quantum electrodynamics. *Phys. Rev. A*, 2006, 74, 065801.
- [3.17] X. Yu, D. Xiong, H. Chen, P. Wang, M. Xiao and J. Zhang. Multi-normal-mode splitting of a cavity in the presence of atoms: A step towards the superstrong-coupling regime. *Phys. Rev. A*, 2009, 79, 061803.
- [3.18] X. Yu, J. Zhang. Multi-normal mode-splitting for an optical cavity with electromagnetically induced transparency medium. *Opt. express.*, 2010, 18, 4057.
- [3.19] Y. Zhu, D. J. Gauthier, S. E. Morin, Q. Wu, H. J. Carmichael, and T. W. Mossberg. Vacuum Rabi splitting as a feature of linear-dispersion theory: Analysis and experimental observations. *Phys. Rev. Lett.*, 1990, 64, 2499.
- [3.20] H. Wang, D. J. Goorskey, W. H. Burkett. And M. Xiao. Cavity-linewidth narrowing by means of electromagnetically induced transparency. *Opt. Lett.*, 2000, 25, 1732.
- [3.21] E. T. Jaynes and F. W. Cummings. Comparison of quantum and semiclassical radiation theories with application to the beam maser. *Pro. IEEE*, 1963, 51, 89.
- [3.22] M. D. Lukin, M. Fleischhauer and M. O. Scully. Intracavity electromagnetically induced transparency. *Opt. Lett.*, 1998, 23, 295.
- [3.23] G. Muller, M. Muller, A. Wicht, R. H. Rinkleff and K. Danzmann. Optical resonator with steep internal dispersion. *Phys. Rev. A*, 1997, 56, 2385.
- [3.24] M. Soljacic, E. Lidorikis, L. V. Hau and J. D. Joannopoulos. Enhancement of microcavity lifetimes using highly dispersive materials. *Phys. Rev. E.*, 2005, 71, 026601.
- [3.25] Y. H. Li, H. T. Jiang, L. He, H. Q. Li, Y. W. Zhang, H. Chen and S. Y. Zhu. Linewidth narrowing in microstrip resonator using effective highly dispersive medium. *Chin. Phys. Lett.*, 2007, 24, 975.
- [3.26] F. Kien and K. Hakuta. Intracavity coupled active resonator induced dispersion. *Phys. Rev. E.*, 2009, 79, 013832.
- [3.27] H. Wu and M. Xiao. Cavity linewidth narrowing and broadening due to competing linear and nonlinear dispersions. *Opt. Lett.*, 2007, 32, 3122.
- [3.28] A. Wicht, K. Danzmann, M. Fleischhauer, M. O. Scully, G. Muller and R. H. Rinkleff. White-light cavities atomic phase coherence and gravitational wave detectors. *Opt. Commun.*, 1997, 134, 431.
- [3.29] H. Wang, D. Goorskey and M. Xiao. Atomic coherence induced Kerr Nonlinearity enhancement in Rb vapor. *J. Mod. Opt.*, 2002, 49, 335.

## 第四章 基于腔的原子数测量

### 4.1 引言

在本章中，我主要介绍在 MIT 的 Vladan 小组学习和参与的部分工作。Vladan 小组在量子信息过程和冷原子物理方面做了许多优秀的工作。在 2010 到 2011 年，有机会到该小组学习，并参与了部分工作。下面是我学习和参与的部分工作的简要介绍。由于系统复杂，且时间有限，不能详尽学习所有方面。在这里仅介绍一下探测腔内几个原子的相关实验。

单原子是现代量子光学的重要资源，具有广阔的应用前景。例如，单原子激光<sup>[4.1-4.3]</sup>，是光子有秩序地按队列发出的激光，它是实现光子线路（在量子信息中替代传统的电子线路）的重要单元。早期的单光子激光是采用热原子束实现，由于热原子束中原子数有很大的随机性，因此光源的特性会受到影响<sup>[4.4]</sup>。随着磁光捕获技术的发展，使单个和多个确定数目的原子冷却和捕获取得显著进步，这些技术使利用确定性的单原子产生光子源得以实现<sup>[4.4,4.5]</sup>。另一方面，单原子相对于光子和离子来说，具有很好的可控性和抗干扰能力，而且相对与分子其结构简单，因此它是量子信息的重要载体。2004年，德国Meschede小组将铯原子两个基态超精细能态的一对特定Zeeman态作为量子比特，利用线性梯度磁场的Zeeman效应使量子态之间的跃迁频率与其位置关联，实现对量子比特的寻址和反转操控<sup>[4.6]</sup>。2007年德国的Rempe实验室实现了原子与光子的纠缠<sup>[4.7]</sup>，为量子计算、量子信息方面的研究打下基础。此外，单原子本身也是许多物理问题的实验平台，如单原子的真空Rabi劈裂<sup>[4.8]</sup>，单原子的photon blockade效应<sup>[4.9]</sup>和单原子的电磁诱导透明<sup>[4.10]</sup>等。

在自由空间中，可以通过控制磁光阱的参数可以有效控制原子的装载率，来捕获单个原子。例如提高真空度，减小冷却光光斑，增加磁场梯度<sup>[4.11,4.12,4.13]</sup>和反馈技术<sup>[4.14,4.15]</sup>等，可以俘获单个原子或多个确定数目的原子。然后利用大失谐深的偶极力阱装载原子，原子寿命可以达到分钟量级<sup>[4.16]</sup>。2009年山西大学光电所利用大的磁场梯度的磁光阱实现了捕获单个原子并将其装载到偶极阱中<sup>[4.17]</sup>。如果利用两束对射的远失谐强聚焦光束形成一维lattice，可以装载单个原子，并通过控制两束光的频差，可以实现原子的运输-光学传送带<sup>[4.18]</sup>。另外，在光学腔内，通过腔内建立的驻波偶

极阱来捕获单个原子<sup>[4.19]</sup>。Rempe小组借助于红、蓝两个偶极阱，通过反馈技术可以将单个原子在腔内的寿命提高到秒<sup>[4.20]</sup>。山西大学光电所在近几年中利用原子与腔的强耦合系统完成了对腔内单个原子的测量和操控等方面的一系列工作<sup>[4.21,4.22]</sup>。

在本实验中，由于实验的独特设计—利用13.7mm的长FP腔，所以可以直接将MOT与腔中心重合。因此在自由空间中的单原子捕获的技术和基于腔来操控原子的技术都可以应用到本实验中，这使得该系统具有非常广阔的应用前景。但是由于提供磁场的四极线圈是置于真空系统中的，不能进行制冷处理，所以不能产生较大的磁场梯度。但是由于长腔所带来的便利，所以可以直接将装载到腔内的原子通过非常弱的pump来产生单个或多个原子。极大地简化了实验的难度。另外，一般腔内原子数可以通过旁路收集荧光然后利用单光子探测器探测，也可以通过CCD进行单原子成像。在本实验中，尝试利用腔的透射来测量腔内的单个原子<sup>[4.23]</sup>，并期望能够分辨出多个原子。

## 4. 2 腔内探测几个原子的基本理论

J-C 模型<sup>[4.24]</sup>描述二能级原子与腔场之间的相互作用，如果略掉系统的损耗，在偶极近似与旋转波近似下，系统的 Hamiltonian 可以写为：

$$H = \hbar\omega_c a^\dagger a + \hbar\omega_a |e\rangle\langle g| - \hbar g (a^\dagger |g\rangle\langle e| + |e\rangle\langle g| a) \quad (4.1)$$

其中  $\omega_c$  为腔模的共振频率， $\omega_{eg}$  为二能级原子基态  $|e\rangle$  与激发态  $|g\rangle$  之间的频率差， $a^\dagger$  与  $a$  分别为腔模光子的产生和湮灭算符， $g$  为耦合强度。求解 Hamiltonian 量，可以得到系统的本征态为：

$$\begin{aligned} & |g, 0\rangle \\ & |n, \pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|g, n\rangle \pm |e, n-1\rangle) \\ & n = 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (4.2)$$

相应的能量本征值为：

$$\begin{aligned} E_{g,0} &= 0 \\ E_{n,\pm} &= n\hbar\omega_c \pm \hbar g\sqrt{n} \end{aligned} \quad (4.3)$$

如果考虑系统的损耗，4.1 式可变为：

$$H = \hbar(\omega_c + i\frac{\kappa}{2})a^\dagger a + \hbar(\omega_{eg} + i\frac{\gamma}{2})|e\rangle\langle g| - \hbar g (a^\dagger |g\rangle\langle e| + |e\rangle\langle g| a) \quad (4.4)$$

其中  $\kappa$  为腔的线宽， $\gamma$  为原子的自然线宽。求解该 Hamiltonian 量，则本征能量为：

$$E_{g,0} = 0$$

$$E_{n,\pm} = n\hbar\omega_c + i\frac{[(2n-1)\kappa + \gamma]}{4} \pm \frac{\hbar}{2}\sqrt{4ng^2 - \frac{(\kappa - \gamma)^2}{4}} \quad (4.5)$$

上式的虚部给出能级的线宽。

下面考虑当有驱动场 probe 光从腔的输入端耦合进系统中的情况。在此条件下，利用旋波近似，系统 Hamiltonian 可以写为：

$$\hat{H}_0 = \hbar(\omega_a - \delta + i\frac{\gamma}{2})|e\rangle\langle e| + \hbar(\omega_c - \delta + i\frac{\kappa}{2})a_c^\dagger a_c - \hbar g(a^\dagger |g\rangle\langle e| + |e\rangle\langle g| a)$$

$$\hat{H}_1 = -\hbar\frac{\Omega_p}{2}(a_c^\dagger + a_c) \quad (4.6)$$

其中  $\delta = \omega_p - \omega_c$  为 probe 相对于腔模的失谐量。这里我们认为原子与腔模共振。在弱驱动场近似下，假设原子在激发态的概率很低，利用一阶微扰，系统的波函数可以写为：

$$\psi = |g,0\rangle + c_1|g,1\rangle + c_2|e,0\rangle \quad (4.7)$$

通过 Schrodinger 方程，在稳态条件下，可以求得：

$$c_1 = \frac{\delta - i\gamma/2}{g^2 - (\delta - i\gamma/2)(\delta - i\kappa/2)} \frac{\Omega_p}{2} \quad (4.8.a)$$

$$c_2 = \frac{g}{g^2 - (\delta - i\gamma/2)(\delta - i\kappa)} \frac{\Omega_p}{2} \quad (4.8.b)$$

所以腔内的原子向自由空间的散射率为：

$$\Gamma_f = |c_2|^2 \gamma \quad (4.9)$$

光子从腔内溢出腔外的透射率为：

$$\Gamma_c = |c_1|^2 \kappa \quad (4.10)$$

在 probe 光相对于腔的失谐为零时，将 4.8 式代入 4.9 和 4.10 式可得：

$$\Gamma_f = \frac{4g^2\kappa\gamma}{4g^2 + \kappa\gamma} \frac{\Omega_c^2}{\kappa} \quad (4.11.a)$$

$$\Gamma_c = \frac{\kappa^2\gamma^2}{4g^2 + \kappa\gamma} \frac{\Omega_c^2}{\kappa} \quad (4.11.b)$$

如果定义腔的协同系数：

$$\eta = \frac{4g^2}{\kappa\gamma} \quad (4.12)$$

则 4.11 式可化为<sup>[4.25]</sup>:

$$\Gamma_f = \frac{\eta}{(1+\eta)^2} \frac{\Omega_c^2}{\kappa} \quad (4.13.a)$$

$$\Gamma_c = \frac{1}{(1+\eta)^2} \frac{\Omega_c^2}{\kappa} \quad (4.13.b)$$

由上式 4.13. b 可以看出, 由于腔内的原子存在, 腔内光子向腔外溢出的几率发生了明显变化, 由空腔时的  $\Omega_c^2/\kappa$ , 变为该值的  $1/(1+\eta)^2$ 。从中我们得到一些想法, 在腔内只存在几个原子时, 是否可以通过测量腔内光子的透射率, 来测量腔内的原子数。在有不止一个原子在腔内时, 并且考虑到饱和效应后, 4.13. b 式可以写为:

$$\Gamma_c = \frac{1}{\left(1 + \frac{N_a \eta}{1 + s N_a}\right)^2} \frac{\Omega_c^2}{\kappa} \quad (4.14)$$

其中  $N_a$  为腔内原子数,  $s$  为饱和参量, 考虑到有一定失谐时, 其定义为:

$$s = \frac{s_0}{1 + \left(\frac{\delta}{\gamma/2}\right)^2} \quad (4.15)$$

其中  $s_0$  为共振饱和参量,  $\delta$  为探测光的失谐。

### 4.3 实验系统

#### 1. 激光器系统

实验中用到的激光系统包括: 参考激光器、冷却光、repump 光、pump 光、 $\eta$  光、传导激光器、 $\gamma$  光和 937 光等。a. 参考激光器, 作为其他激光器的稳频基准, 其他激光器或谐振腔直接或间接锁定到参考光上, 这台激光器自身通过 DAVLL 技术锁定到铯原子 D2 线  $F=3-F'=2$  跃迁线; b. 冷却光、repump 光和选态用的 pump 光来自一台激光器, 一部分作为冷却光, 一部分经过移频后作为 repump 光和 pump 光, 冷却光通过与参考激光器的拍频分别锁定; c.  $\eta$  光, 通过与参考光拍频锁定后, 一部分注入到传导腔, 通过 PDH 方法<sup>[4.26]</sup>将传导腔锁定到  $\eta$  光上, 另一部分作为实验腔的探测光。d. 传导光, 为 817nm 的激光, 一部分注入到传导腔, 利用 PDH 技术锁定到传

导腔上，另一部分耦合到实验腔，用来锁定实验腔，由于频率远离铯原子的跃迁线，所以实验过程中对铯原子的影响较小。e.  $\gamma$  光，利用与参考光的拍频信号反馈锁定频率，实验中用作从腔的侧面入射探测腔内原子的 probe 光，也被可用作 pump 光的备用光。f. 937nm 光，作为腔内束缚原子的 lattice 光。

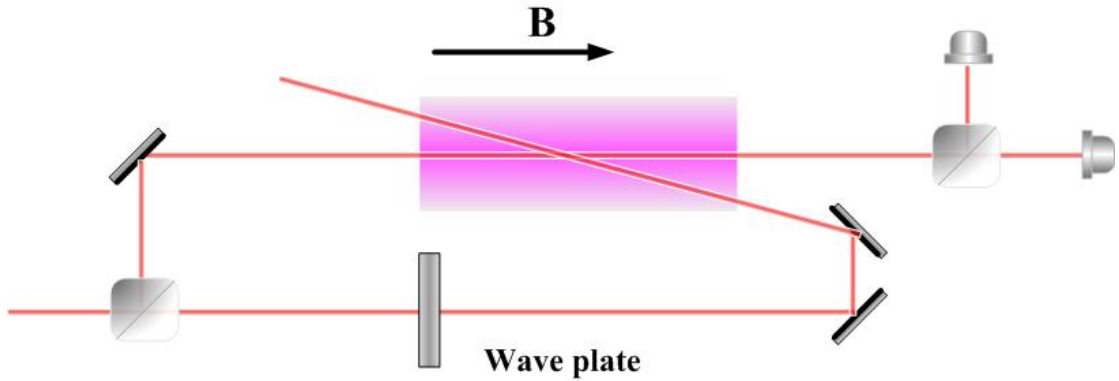


图 4.1 多普勒自由 DAVLL 光路

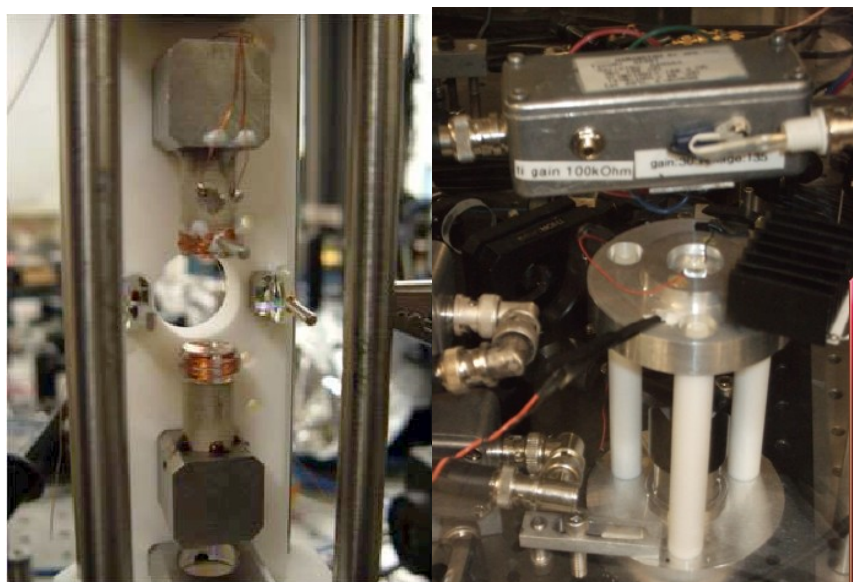
该实验中，除冷却为 DBR 激光器外，其他均为 DFB 激光器，其中 852nm 激光器，由 Eagleyard 公司生产，典型输出功率 150mW，频率随电流的变化率为 1GHz/mA，实验中所用的自制电流源的电流噪声为  $0.32\text{nA}/\sqrt{\text{Hz}}$ ，因此由电流噪声所产生的线宽扩展约为  $\Delta\nu = \pi S^2 = \pi(0.32\text{nA}/\sqrt{\text{Hz}} \cdot 1\text{GHz}/\text{mA})^2 = 0.3\text{MHz}$ 。817nm 光也为 DFB 激光器，由 Sarnoff 公司生产，最大输出功率 15mW，线宽为 10MHz，作为传导光来稳定实验腔，而实验腔的线宽约为 170kHz，显然用这台激光器很难锁定实验腔，因此需要压窄 817nm 激光器的线宽。实验中，将激光器输出光的 1% 反馈回激光器，反馈部分光路长为 15cm。经过光学反馈后 817nm 激光线宽被压窄，但是仍然大于 3MHz，一方面是由于光学反馈并不能将线宽压缩到非常小，另一方面这台激光器的频率随电流的变化率为 3GHz/mA，由此带来的线宽扩展为 2.9MHz。而将该该激光器锁定到传导腔，会较为困难。利用该传导光锁定实验腔，仍会引起较大的频率抖动。而且控制压电陶瓷的高压放大器的噪声大约 4mV，扫描传导腔的一个自由光谱区电压约为 30V，由此，4mV 的噪声会引起频率振动约为 1.4MHz，已经远超出传导腔或是实验腔的线宽。但是当增加误差信号的信噪比，会有效降低噪声，压窄传导激光器的线宽。

## 2. 实验腔和传导腔

实验腔长为 13.7mm，精细度为  $6 \times 10^4$ ，自由光谱区为约为 10.949GHz，对应线宽



173kHz。两个腔镜的曲率半径为 10mm， $TEM_{00}$  的腰斑半径为  $35\mu\text{m}$ 。对于铯原子和 852nm 的光场，该腔的最大协同系数约为 7，远大于 1，因此满足强耦合条件。此外为了避免铯原子镀到镜面上而降低腔的精细度，两个腔镜侧面缠绕了 10 匝聚酰亚胺浸泡过的导线，为避免由此产生额外的磁场的影响，其中每 5 匝线圈相互反向缠绕。



a)实验腔

b)传导腔

图 4.2 实验腔和传导腔

传导腔腔长为 13.3mm，自由光谱区 11.257GHz，精细度  $6 \times 10^4$ ，线宽 187KHz。两个腔镜的曲率半径为 2.5cm。

为提高稳定性，实验腔和传导腔均用聚四氟乙烯制作的元件与实验平台或固定装置隔离，而且对传导腔进行了恒温控制。

### 3. 磁光阱

冷却光与铯原子 D2 线  $F=4-F'=5$  跃迁线循环作用，repump 光与  $F=3-F'=4$  跃迁线共振，六束 MOT 光的直径为 1cm，与腔中心处重叠。

用作磁光阱的四极线圈内置到真空系统中，这样由于线圈到 MOT 中心的距离减小了很多，所以较小的电流即可产生较大的磁场梯度，同时较小的电流也减小了电流关断的时间。MOT 中心处径向磁场梯度 6.7G/cm，轴向磁场梯度 3G/cm。但由于不能制冷所以不能产生很大的磁场，不过已能满足实验的需要。

### 4. 腔内一维光学晶格

磁光阱捕获的原子被腔内的 937nm 的一维光学晶格束缚住，937nm 为铯原子的魔术波长，即对铯原子的基态能级  $6^2S_{1/2}$  和激发态  $6^2P_{1/2}$  能级的移动相同，因此可以忽

略 937nm 光对原子的影响。由红失谐的所形成的一维光学势阱，可表示为：

$$U(r, z) = U_0 \cos^2(kz) \exp\left(-\frac{2r^2}{\omega_0^2}\right) \quad (4.16)$$

其中， $k$  为波矢， $\omega_0$  为 937 光在腔内的腰斑半径，束缚深度  $U_0 = \frac{\hbar\gamma^2 I}{2\delta\pi\omega_0^2 I_s}$ ， $I_s$  为饱和光强， $I$  为光强， $\delta$  为 937 相对于原子跃迁线的失谐量。结合实验中的数据，937nm 激光在腔前功率约为 3mW，对应的该光精细度为 300，所以腔内功率约为 180mW，腰斑半径为 34 $\mu$ m，所以束缚深度约为 5MHz，径向束缚频率为 1.2kHz，轴向 270kHz。

#### 5. 原子的捕获和冷却

实验的主程序有一台计算机控制，每秒钟完成三次循环。每次循环过程中，MOT 首先打开，原子装载 185ms，期间冷却光相对于  $F=4-F'=5$  跃迁线失谐约 17MHz，repump 光与  $F=3-F'=4$  跃迁线共振，937nm 光在实验过程中始终打开。然后关断磁场，由于四极电流不能马上完全降为 0，为了避免关断电流过程中由于磁场抖动引起原子加热，将冷却光调节到远失谐处，20ms 后再将冷却光关断。在 205ms 时，偏置磁场打开用来平衡地磁场和杂散磁场，冷却光和 repump 光调节到合适的频率进行偏振梯度冷却，在此过程中冷却光失谐到  $F=4-F'=4$  跃迁线附近，repump 光相对  $F=3-F'=2$  跃迁线蓝失谐。在 225ms 降低冷却光光强，此时已获得较多的处于  $F=4$  态的原子，而且原子已被充分冷却。在 250ms 到 300ms 之间为暗时间，在这段时间内，关断 MOT 和 repump 光，由于腔内光学晶格的束缚作用，装载到腔内的原子具有较长的寿命，而停留在腔内，位于腔外的原子将自由下落。在暗时间之后，再进行 10ms 的偏正梯度冷却。然后重复上述过程。

### 4. 4 谐振腔和激光器的锁定

该实验系统包括一个很长的频率链：参考光  $\rightarrow$   $\eta$  光  $\rightarrow$  传导腔  $\rightarrow$  传导光  $\rightarrow$  实验腔，而且其中有两个高精细度的谐振腔，因此提高系统的锁定非常重要。在系统中谐振腔与激光器结合的锁定都采用的是 PDH 技术，EOM 的调制频率在 20-50MHz 之间。锁定的优化具体包括以下几个方面。

#### 1. 探测系统

EOM 的调制频率在 20-50MHz 之间，这样便要求探测系统的带宽应该大于 50MHz，

而且有较强的增益，足够的信噪比。所以实验中采用的是性能较好的 APD，电路如图 4.2 所示。高压驱动电压一般在 70V-120V 之间，为 APD 提供较大的偏置电压，因此光电信号可以获得较大增益，减少后面的放大电路，因为虽然放大电路均采用低噪声 Mini-Circuit 的 LNA，但是相对 APD 来说噪声仍然较大。

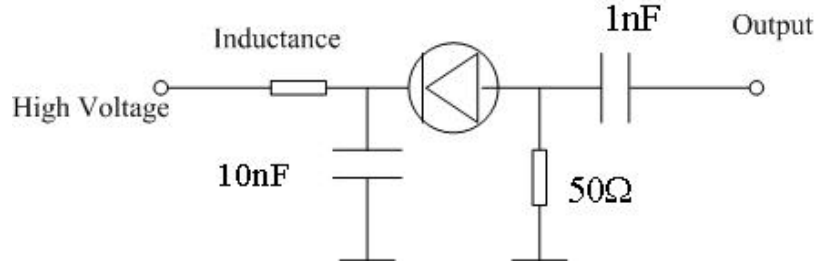


图 4.3 APD 探测器电路

## 2. PI 电路

PI 电路是低频带宽锁定的重要部分，应尽量扩展 PI 电路的带宽和减小相位延迟。一方面移除原来带宽较窄的运算放大器，减小单极放大的倍数，另一方面尽量增加主动滤波电路的带宽。最后 PI 电路的开路带宽扩展到 MHz。

## 3. 实验腔的锁定

实验腔的锁定采用 PDH 技术，EOM 调制频率 28MHz。腔的固定支架部分在低频 5kHz 处存在共振峰，压电陶瓷在十几 kHz 到几十 kHz 范围内存在共振峰，这些共振频率严重影响了实验腔的稳定性，因此在 PI 电路前加入了两个高 Q 值 (20) 的主动陷波滤波器，用来抑制机械共振频率噪声和电子共振频率噪声的影响。优化后的低频反馈部分的单位增益带宽扩展到 1.5kHz。

除了抑制低频噪声，另一方面增加传导光的高频反馈。为实现高带宽反馈，在实验腔前加入 AOM 移频，AOM 由 VCO 控制，高频信号被反馈到 VCO 上。传导光两次通过 AOM，单次通过时间约为 120ns，其他光路和电路的延迟时间约为 100ns，所以由 AOM 所决定的高频部分带宽被限制在 200kHz 左右。

## 4. 系统的相对稳定性

实验中所有的激光器都锁定在一起，实验腔和传导腔也被锁定到激光器上。固然激光器和腔的决定稳定性非常重要，但是当绝对稳定性达到要求以后，比如实验腔的带宽为 170kHz，锁定后带宽扩展到 MHz，绝对稳定性降低，但是锁定后带宽远小于铯原子的自然线宽 5MHz，完全满足实验的要求。所以，某个激光器或谐振腔的绝对稳定性变得并不是非常重要，重要的是激光器和谐振腔之间的相对稳定性。为提

高系统的相对稳定性，传导光的高带宽的反馈信号被分成两部分，一部分反馈给 817nm 光本身，如前所述，另一部分反馈给  $\eta$  光在实验腔前的 EOM。

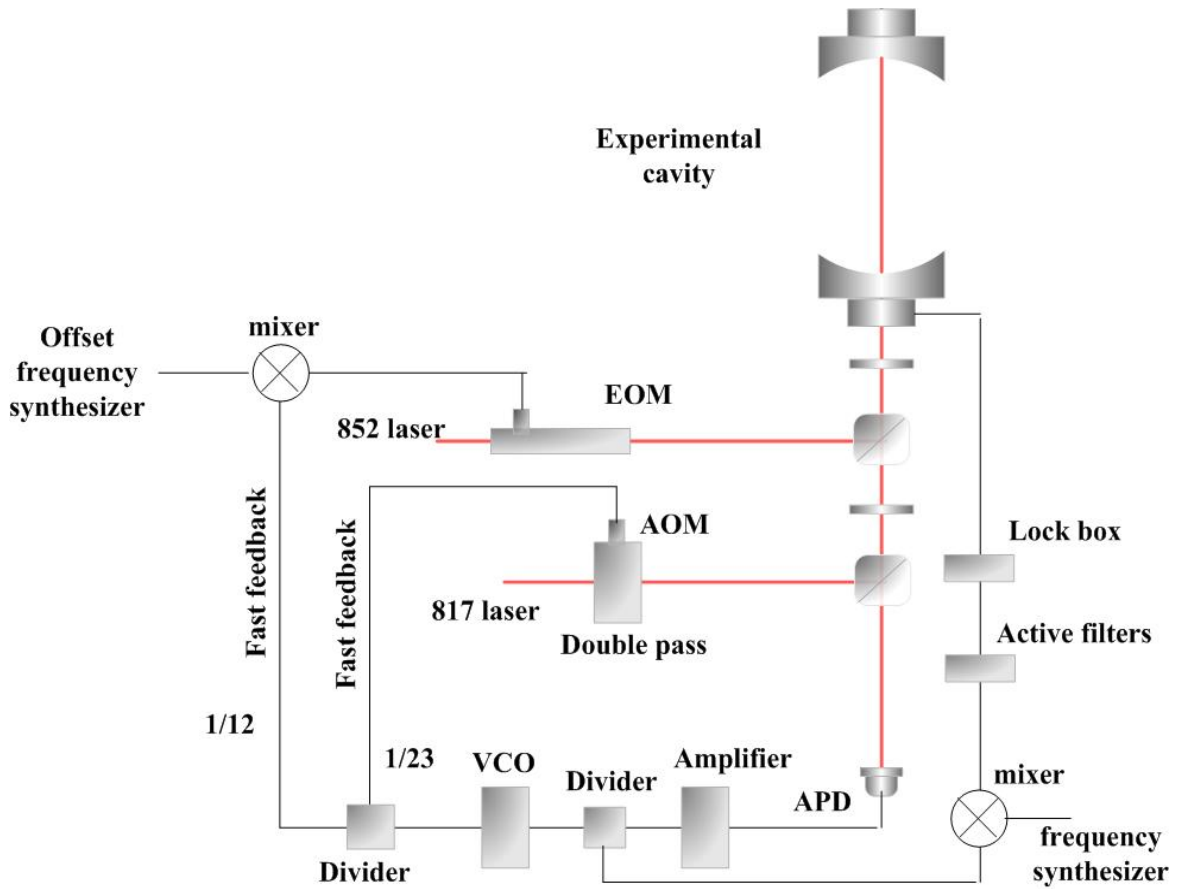


图 4.4 实验腔锁定结构图

但是 817nm 激光和 852nm 激光波长相差 35nm，因此相同的反馈会造成不同的频移量，而影响稳定性，所以需要选择合适的反馈比例，而使反馈对这两束光的频移量相同。如果假设 817nm 激光频率漂移为  $\Delta_{817}$ ，因为实验腔锁定到 817nm 激光上，所以由此

带来的实验腔腔长的变化量为  $\Delta_L = -L \frac{\Delta_{817}}{v_{817}}$ ，而探测实验腔的 852nm 激光是锁定到实

验腔上的或与实验腔保持一致，所以，腔长的改变给 852nm 激光带来的频率移动为

$\Delta_{852} = -v_{852} \frac{\Delta_L}{v_{817}}$ ，为使两者的频移相同所以应满足： $\Delta_{852} = \Delta_{817} \frac{\lambda_{817}}{\lambda_{852}}$ ，所以误差信号

反馈给 817nm 和 852nm 激光的比例为：23/12，在这里由于 817nm 激光两次穿过 AOM，

所以  $\frac{23/2}{12} = 0.9583$ ， $\frac{817}{852} = 0.9589$ ，误差为 0.06%。

## 4.5 腔内几个原子的测量

### 4.5.1 探测效率

实验中用到的单光子探测器为 Perkin-Elmer 公司的 SPCM-AQR-13，内部探测效率在 852nm 处为 40%。死时间为 50ns，与此对应计数率在 1MHz 以下时，不会饱和探测器，实验中一般在 600kHz 一下，最大计数率为 10MHz。光子在进入探测器之前，要经过真空系统、实验腔、波片、偏振分光棱镜、干涉滤波片和多模光纤。在该实验过程中只使用一个单光子探测器 SPCM1。真空系统的窗口和实验腔的总的透射率为 42%，偏振分光棱镜和干涉滤波片及多模光纤总的透射率为 40%，所以整个探测光路总的探测效率为 6.7%。

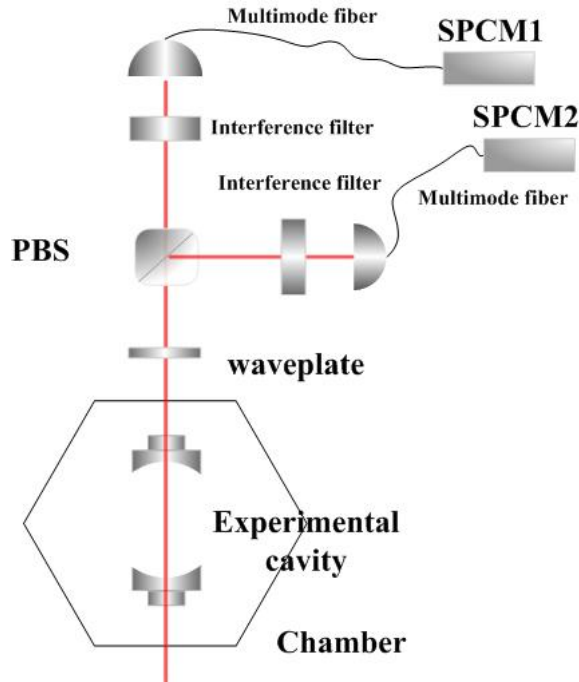


图 4.5 探测光路

### 4.5.2 单原子和两个原子的探测

对于该实验腔，最大协同系数为 7，即  $g^2 = \frac{7}{4}\kappa\gamma > \kappa\gamma$ ，对应单原子耦合强度为 1.2MHz，所以单个原子足可以显著影响腔的透射，这为利用腔来探测单个原子提供了可能。这也是设计该实验装置之初的想法。

实验过程中，首先将实验腔锁定到 F=4 到 F=5 跃迁线上，然后经过 4.3 中的步骤，

将原子装载到腔内后，打开 pump 光将原子制备到  $F=3$  态，然后从腔的侧面入射一束非常弱的光 pump 光，与  $F=3-F'=4$  共振，在这束光的作用下就会有一两个原子从  $F=3$  态转移到  $F=4$  态，与此同时打开  $\eta$  光探测腔的透射， $\eta$  光频率与  $F=4$  到  $F=5$  跃迁线共振。处于  $F=4$  态的原子不会一直驻留在  $F=4$  态，由于碰撞和其他因素的影响回到  $F=3$  态，然后重复上述过程，循环探测。

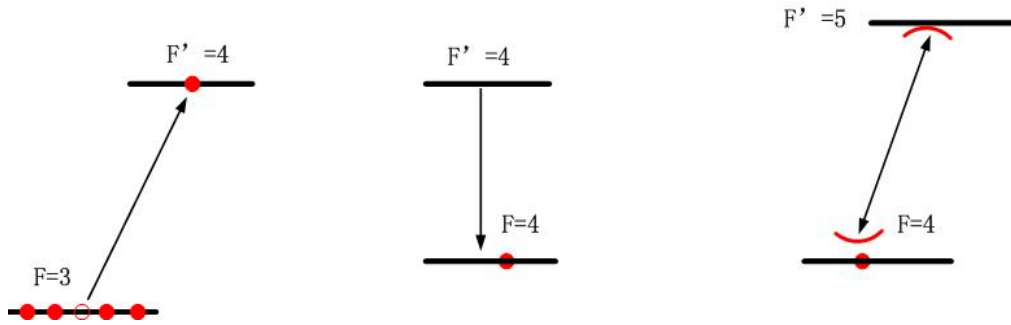


图 4.6 基于腔的单原子探测

如果腔内的原子均处于  $F=3$  态，在腔内装载的原子数很少时，我们忽略掉  $F=3$  态的影响，因为  $F=3$  态与  $F=4$  态之间的能级差为  $9\text{GHz}$ 。此时腔的透射可以看做是单位 1，如果腔内有一个原子处于  $F=4$  态，腔的透射与没有原子相比被减小了  $\frac{1}{(1+\eta)^2}$

倍。为不饱和原子，最大入射光子数速率  $\frac{\gamma(1+\eta)^2}{4\eta}$ ，此时对应的空腔的透射率为  $17/\mu\text{s}$

( $\eta$  取平均值 2)。所以对于空腔，如果平均探测一个光子需要  $\frac{1}{17 \times 0.067} \approx 0.9\mu\text{s}$ ，大

于探测器的饱和计数率。

图 4.7 为散粒噪声探测实验中的数据，在几分钟内测量的约为 30 个光子的概率分布，横轴为光子数，纵轴为光子数对应的概率。该图说明激光系统在几分钟内功率的稳定性为 3%。

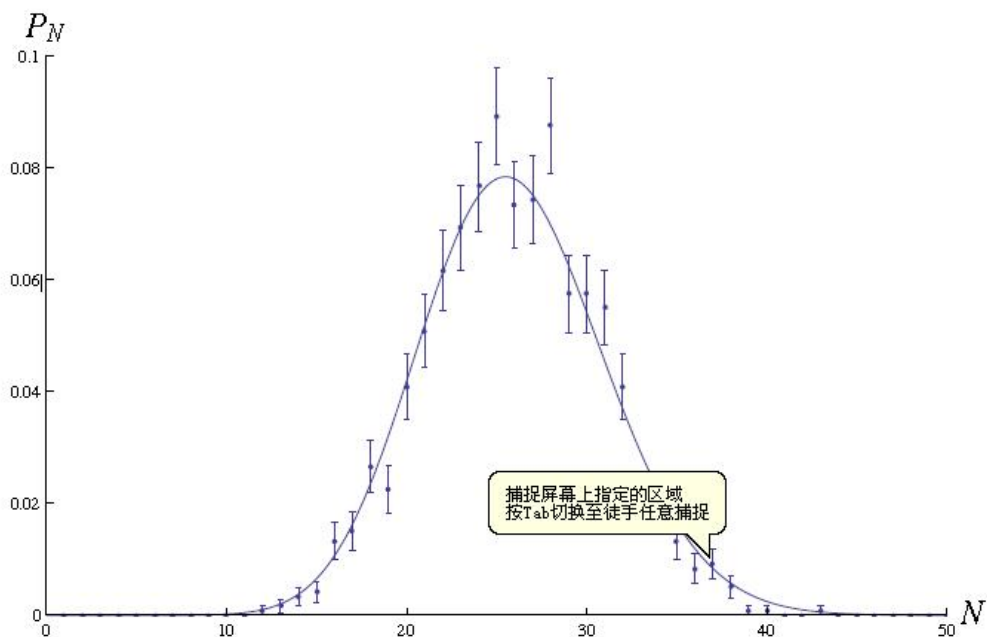


图 4.7 散粒噪声测量

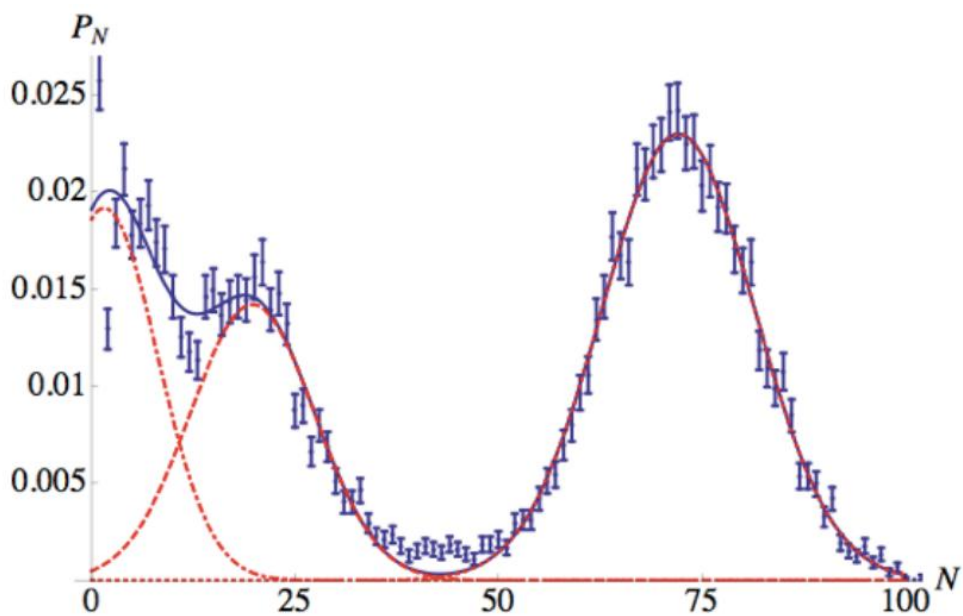


图 4.8 腔内单原子数探测

图 4.8 为腔内处于  $F=4$  态的原子数测量结果。最右面的峰为空腔的透射，左边的小峰为一个原子的透射，最左面对应两个以上的原子时的情况。从该图已经能够分辨出单个原子，但是仍然不明显。其原因主要是腔内处于  $F=3$  态的背景原子的影响。所以采用了以下方法以期达到较好的效果。



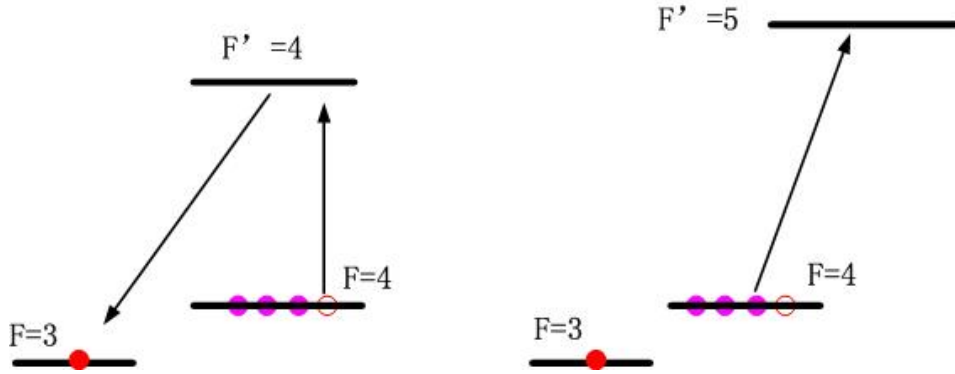


图 4.9 腔内背景原子的移除过程

在完成原子装载到腔内以后，原子处于  $F=3$  态，然后从侧面入射一束 **pump** 光，该 **pump** 光与  $F=3$  到  $F=4$  跃迁线共振，将原子从  $F=3$  态转移到  $F=4$  态，然后打开原来的 **pump** 光，其频率调节到与  $F=4-F'=4$  跃迁线共振，将几个原子从处于  $F=4$  态转移回  $F=3$  态，然后再用一束较强的光，其频率与  $F=4-F'=5$  跃迁线共振，从侧面的另外方向入射，将原子加热推出腔外。如图 4.9 所示。然后再打开第一束 **pump** 光，将其失谐到将剩下的少量原子转移回  $F=4$  态，再进行探测。

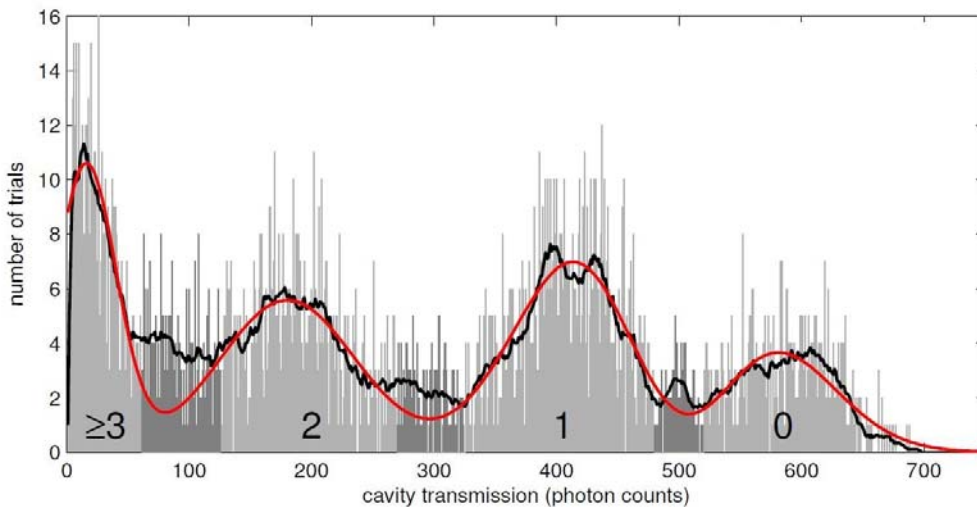


图 4.10 优化后的腔内原子数的探测

上图为初步的实验结果，横轴为光子数，纵轴为对应的几率，这里没有归一化。黑线对原有数据进行了一定的平均处理，使其变得平滑，红线为对实验数据的高斯拟合。



## 4. 6 小结

在本章中，介绍了，我在 MIT 的 Vladan 小组期间学习和参与的部分工作。主要包括基于腔的原子探测的相关理论，实验装置和实验过程，以及初步的实验结果。由于实验系统复杂，学习时间有限，所以不能详尽到所有方面。另外，目前的实验仍在继续优化之中，需进一步提高实验效果。

## 第四章 参考文献

- [4.1] M. Loffler, G. M. Meyer and H. Walther. Spectral properties of the one-atom laser. *Phys. Rev. A*, 1997, 55, 3923.
- [4.2] C. Ginzler, H.-J. Briegel, U. Martini, B.-G. Englert and A. Schenzle. Quantum optical master equations: The one-atom laser. *Phys. Rev. A*, 1993, 48, 732.
- [4.3] T. Pellizzari and H. Ritsch. Preparation of stationary Fock states in a one-atom Raman laser. *Phys. Rev. Lett.*, 1994, 72, 3973.
- [4.4] J. McKeever, A. Boca, A. D. Boozer, J. R. Buck and H. J. Kimble. Experimental realization of a one-atom laser in the regime of strong coupling. *Nature*, 2003, 425, 268.
- [4.5] A. D. Boozer, A. Boca, J. R. Buck, J. McKeever and H. J. Kimble. Comparison of theory and experiment for a one-atom laser in a regime of strong coupling. *Phys. Rev. A*, 2004, 70, 023814.
- [4.6] D. Schrader, I. Dotsenko, M. Khudaverdyan, Y. Miroshnychenko, A. auschenbeutel and D. Meschede. Neutral atom quantum register. *Phys. Rev. Lett.*, 2004, 93, 150501.
- [4.7] T. Wilk, S. C. Webster, A. Kuhn and G. Rempe. Single-Atom Single Photon Quantum Interface. *Science*, 2007, 317, 488.
- [4.8] A. Boca, R. Miller, K. M. Birnbaum, A. D. Boozer, J. McKeever and H. J. Kimble. Observation of the Vacuum Rabi Spectrum for One Trapped Atom. *Phys. Rev. Lett.*, 2004, 93, 233603.
- [4.9] K. M. Birnbaum, A. Boca, R. Miller, A. D. Boozer, T. E. Northup and H. J. Kimble. Photon blockade in an optical cavity with one trapped atom. *Nature*, 2005, 436, 87.
- [4.10] M. Mucke, E. Figueroa, J. Bochmann, C. Hahn, K. Murr, S. Ritter, C. J. Villas-Boas and G. Rempe. Electromagnetically induced transparency with single atoms in a cavity. *Nature*, 2010, 465, 755.
- [4.11] F. Ruschewitz, D. Bettermann, J. L. Peng and W. Ertmer. Statistical investigations on single trapped neutral atoms. *Europhys. Lett.*, 1996, 34, 651.
- [4.12] D. Haubrich, H. Schadwinkel, F. Strauch, B. Ueberholz, R. Wynands, and D. Meschede. Observation of individual neutral atoms in magnetic and magneto-optical Traps. *Europhys. Lett.*, 1996, 34, 663.
- [4.13] P. A. Willems, R. A. Boyd, J. L. Bliss, and K. G. Libbrecht. Stability of magneto-optical traps with large field gradients: limits on the tight confinement of single

- atoms. *Phys.Rev.Lett.*, 1997, 78, 1660.
- [4.14] S. B. Hilland and J. J. McClelland. Atoms on demand: Fast, deterministic production of single Cr atoms. *Appl.Phys. Lett.*, 2003, 82, 3128.
- [4.15] S. Yoon, Y. Choi, S. Park, J. Kim, J. H. Lee, and K. An. Definitive number of atoms on demand: Controlling the number of atoms in a few-atom magneto-optical trap. *Appl. Phys. Lett.*, 2006, 88, 211104.
- [4.16] D.Frese, B. Ueberholz, S. Kuhr, W. Alt, D. Schrader, V. Gomer and D. Meschede. Single atoms in a optical dipole trap: towards a deterministic source of cold atoms. *Phys. Rev. Lett.*, 2000, 85, 3777.
- [4.17] J. He, J. Wang, B. Yang, T. Zhang, J. Wang. Single cesium atoms transferring between a magneto-optical trap and a far-off-resonance optical dipole trap. *Chinese Phys. B*, 2009, 18, 3404.
- [4.18] S. Kuhr, W. Alt, D. Schrader, I. Dotsenko, Y. Miroshnychenko, W. Rosenfeld, M. Khudaverdyan, V. Gomer, A. Rauschenbeutel and D. Meschede. Coherence properties and quantum state transportation in an optical conveyorbelt. *Phys. Rev. Lett.*, 2003, 91, 213002.
- [4.19] J. Ye, D. W. Vernooy and H. J. Kimble. Trapping of single atoms in cavity QED. *Phys. Rev. Lett.*, 1999, 83, 4987.
- [4.20] M. Koch, C. Sames, A. Kubanek, M. Apel, M. Balbach, A. Ourjoumtsev, P. W. H. Pinkse and G. Rempe. Feedback cooling of a single neutral atom. *Phys. Rev. Lett.*, 2010, 105, 173003.
- [4.21] P. Zhang, Y. Zhang, G. Li, J. Du, Y. Zhang, Y. Guo, J. Wang, T. Zhang and W. Li. Sensitive Detection of Individual Neutral Atoms in a Strong Coupling Cavity QED System. *Chin. Phys. Lett.*, 2011, 28, 044203
- [4.22] P. Zhang, Y. Guo, Z. Li, Y. Zhang, Y. Zhang, J. Du, G. Li, J. Wang and T. Zhang. Elimination of degenerate trajectory of single atom strongly coupled to the tilted cavity TEM<sub>10</sub> mode. *Phys. Rev. A*, 2011, 83, 031804(R).
- [4.23] I. Teper, Y. Lin and Vladan Vuletic. Resonator-Aided Single-Atom Detection on a Microfabricated Chip. *Phys. Rev. Lett.*, 2006, 97, 023002.
- [4.24] E.T. Jaynes and F.W. Cummings. Comparison of quantum and semiclassical radiation theories with application to the beam maser. *Proc. IEEE*, 1963, **51**, 89.
- [4.25] H. T. Suzuki, I. D. Leroux, M. H. S. Smith, M. Cetina, A. Grier, J. Simon and V. Vuletic. Interaction between Atomic Ensembles and Optical Resonators: Classical Description. *Advances in Atomic, Molecular, and Optical Physics*, 2011, 60, 201.

[4.26] Eric D. Black. An introduction to Pound–Drever–Hall laser frequency stabilization. Am. J. Phys. 2000, 69, 79.

## 第五章 总结

四波混频过程和腔与原子系统的强相互作用是现代量子光学领域的两个研究热点领域，本文就这两个方面的相关研究工作进行了阐述。

自由空间中，铷原子介质内的非简并四波混频过程所产生的共轭光与探测光为纠缠光，因此它成为量子信息过程，特别是连续变量量子通信的重要资源，第一章介绍了我们在这方面的研究工作，利用两套自零拍探测系统对所产生的强量子关联光束的强度差的探测和分析了额外噪声所产生的影响，通过该探测系统可以很方便的同时测量到散粒噪声基准、压缩和反压缩噪声谱，并且通过调节实验参数使额外的影响最小化，同时使压缩最大。第二章中，为了增强非线性效应和提高转化效率，我们研究了在腔增强作用下的四波混频过程，我们利用  $\Lambda$  型三能级原子的双光子振动所产生的大的色散，使内腔 Stokes 光和 anti-Stokes 光的相位匹配条件得以满足，从而实现了内腔的三共振。第三章中，我们理论上研究了 EIT 介质和腔系统在超强耦合条件下的做正交模劈裂，通过理论分析，我们发现在超强耦合条件下不仅零级腔模会发生正交模劈裂而形成三峰结构，而且临近腔模也会产生劈裂形成多峰结构。第四章主要是我在 MIT 的 Vladan 小组学习期间参与的部分工作，主要是基于腔的原子数探测。Vladan 小组搭建了一个长为 1.4cm 的腔，因此 MOT 可以直接与腔重合，而完成原子到腔内的装载，并且可以利用和弱的 pump 场将少量原子装载到腔内，给实验带来了很大的方便。通过该系统利用原子对腔透射的影响对腔内存在一个或是少量原子时的原子数进行了探测。

## 参与完成的工作

1. Ke Di, **X. Yu**, F. Cheng, J. Zhang. Phase-sensitive reflection of squeezed vacuum field in optical cavity. Chin. Opt. Lett. 10, 091901, 2012.
2. **X. Yu**, M. Xiao and J. Zhang. Triply-resonant optical parametric oscillator by four-wave mixing with rubidium vapor inside an optical cavity. Appl. Phys. Lett. 96, 041101, 2010.
3. **X. Yu** and J. Zhang. Multi-normal mode-splitting for an optical cavity with electromagnetically induced transparency medium. Opt. Express, 18, 4057, 2010.
4. **X. Yu**, D. Xiong, H. Chen, P. Wang, M. Xiao, and J. Zhang, Multi-normal-mode splitting of a cavity in the presence of atoms: A step towards the superstrong-coupling regime. Phys. Rev. A, 79, 061803, 2009.
5. 赵慧红、**于旭东**、张靖, “线性色散理论描述内腔 EIT 介质的正交模式分裂”, 量子光学学报, 2009.
6. 邸克、**于旭东**、张靖, “小型真空压缩光产生装置的实验研究”. 量子光学学报, 2010.
7. **X. Yu**, F. Cheng, Z. Meng, J. Zhang. Measurement of the the intensity difference squeezing via the non-degenerate four wave mixing process in an atomic vapor. (submitted)
8. **X. Yu** and J. Zhang. The realization of the quintuple-resonant optical parametric oscillator: the high order four-wave-mixing process in an optical cavity with hot rubidium vapor.( submitted)
9. 专利: 邸克, **于旭东**, 张靖. 真空压缩态光场的产生装置, ZL 2010 1 0110305. X.

## 致 谢

三年的博士研究生的生活即将结束，勤勉、探索、实践是这六年以来的主线。这期间有许多事值得回忆，但是让我感到收获最大的是这六年期间，光电所的良好科研氛围，艰苦奋斗的精神所给我的熏陶。

首先向彭老师和谢老师表示最诚挚的谢意，两位老师渊博深厚的学术造诣、辛勤耕耘的工作作风、积极向上的生活态度都是我们青年学子学习的典范。

衷心感谢我的导师张靖老师。张老师客观严谨的治学态度，精益求精的工作作风，平易近人的人格魅力对我影响深远；六年来在学业上的孜孜不倦的教诲，在生活上细致入微的关怀，是我完成博士学业的保障。

感谢卫栋、叶晨光、熊德智、陈海霞、王鹏军、郭璐和高峰给我的教会和指导，感谢邸克、赵慧红、霍强、程峰钰、孟增明、付正坤、柴世杰、黄良辉、张岩、陈良超、张芳、李卫给我的帮助和关心，和许多非常有意义的讨论。

感谢我在MIT学习期间Vladan教授给我在生活上和学习上的关怀和帮助，Vladan教授谦和的为人、深厚的理论和实验功底给了我深刻的印象，使我丝毫不敢懈怠，是我不断奋斗的目标。同时感谢Haruka、陈文兰、Kristi、Marko、张好、石墨鲁、梁奇语、李威、John、Monika、Renate给我的帮助，他们使我在美国的学习和生活变得不再枯燥，充满了快乐。

感谢张天才老师、张宽收老师、王海老师、郜江瑞老师、张俊香老师、李永民老师、贾小军老师、苏小龙老师在学习和实验上的指导与帮助。感谢张晋彪副所长、苗德嘉老师、程娇荣老师、郑晋玲老师、高星、石枫以及其他光电所的老师对我学习、工作的支持。感谢石柱师傅、冯东浩师傅、魏克勤师傅、高建森师傅在实验上给予的帮助。

感谢我的父母，从小到大含辛茹苦的养育使我长大成人，在我多年求学的过程中，给予了我巨大的支持，这是我前进的根本动力，谢谢你们！感谢岳父岳母给予我充分的理解和支持，感谢我的爱人的体贴和关怀使我无后顾之忧，专心学习和工作。感谢哥嫂和小侄女、小侄子对我的关心。

感谢这三年来所有给予我帮助和关心的人，谢谢你们！

## 个人简历及联系方式

于旭东 男 河北省保定市

1997-2001	山西大学物理系	材料物理专业	本科
2001-2006	河北工程大学	物理教学	工作
2006-2009	山西大学	量子光学与光量子器件国家重点实验室	光学 硕士
2009-2010, 2011-	山西大学	量子光学与光量子器件国家重点实验室	光学 博士
2010-2011	麻省理工学院	量子信息过程	联合培养博士生

地址：山西省 太原市 山西大学 量子光学与光量子器件国家重点实验室 光电所  
邮编：030006  
电话：18203510925  
电子信箱：jiance\_yu@yahoo.cn



## 承 诺 书

本人郑重声明：所呈交的学位论文，是在导师指导下独立完成的，学位论文的知识产权属于山西大学。如果今后以其他单位名义发表与在读期间学位论文相关的内容，将承担法律责任。除文中已经注明引用的文献资料外，本学位论文不包括任何其他个人或集体已经发表或撰写过的成果。

作者签名：

20 年 月 日

## 学位论文使用授权声明

本人完全了解山西大学有关保留、使用学位论文的规定，即：学校有权保留并向国家有关机关或机构送交论文的复印件和电子文档，允许论文被查阅和借阅，可以采用影印、缩印或扫描等手段保存、汇编学位论文。同意山西大学可以用不同方式在不同媒体上发表、传播论文的全部或部分内容。

保密的学位论文在解密后遵守此协议。

作者签名：

导师签名：

20 年 月 日