

文章编号:1001-246X(2012)01-0145-07

# 异核两组分玻色-爱因斯坦凝聚体中暗孤子的形成及其性质

周艳珍, 张素英, 韩 伟

(山西大学 理论物理研究所, 山西 太原 030006)

摘 要: 数值模拟准一维异核两组分玻色-爱因斯坦凝聚体在谐振子势阱中的运动, 研究调制不稳定性条件 (MI 条件) 下暗孤子的形成及其性质. 在调制不稳定性条件下, 凝聚体基态形成后, 瞬间使组分间的相互排斥力变为相互吸引力, 实时演化可以形成暗孤子. 对各组分自身相互作用系数分析发现, 它们之间满足一定关系时暗孤子在不同的组分内形成, 而且形成的暗孤子在谐振子势阱中呈现周期性的往返对穿运动. 讨论了形成暗孤子数目与两种粒子的质量比率和粒子数比率存在的关系.

关键词: 调制不稳定性条件; 暗孤子; 粒子质量; 粒子数

中图分类号: O469

文献标识码: A

## 0 引言

玻色-爱因斯坦凝聚 (BEC) 中的暗、亮物质波孤子的成功观测及它们的潜在的应用前景, 使 BEC 中的物质波孤子成为了当前低温物理和凝聚态物理研究领域的研究热点之一. 孤子是非线性物质波的存在形式, 它分为亮孤子和暗孤子两类. 亮孤子本身是凝聚体, 而暗孤子由于是凝聚体本身密度缺损的一种表现, 所以它仅仅只能存在于凝聚体内部<sup>[1-4]</sup>. 而且处在外势当中时, 暗孤子能更好的保持其空间轮廓, 稳定的传播. 其中, 暗孤子的性质已经从理论和实验两方面得到了广泛的研究<sup>[5-9]</sup>. 实验上, 可以通过 Feshbach 共振<sup>[10-11]</sup>来调节散射长度 (既可调节大小, 也可调节正负号), 这为我们实现和控制 BEC 中的原子物质波和非线性激发提供了很大的方便.

目前大多数的研究都基于对同核两组分玻色-爱因斯坦凝聚体 (原子间的相互作用为排斥力), 但是异核两组分的玻色-爱因斯坦凝聚体为孤子的产生提供了一个更大的可能性. 文献 [12] 采用调节组分间的散射长度  $a_{12}$ , 在异核两组分玻色-爱因斯坦凝聚体中实现了亮孤子的形成. 本文利用数值模拟的方法, 在异核两组分玻色-爱因斯坦凝聚体 ( $a_{11}, a_{22} > 0$  和  $a_{12} < 0$ ) 中通过调节散射长度  $a_{12}$  来研究共生暗孤子的形成及其性质.

## 1 理论模型

在谐振子势阱中, 异核两组分玻色-爱因斯坦凝聚体的动力学演化特性可由无量纲化的非线性薛定谔方程来描述<sup>[12]</sup>, 在强横向束缚势下, 粒子的运动近似看成在  $x$  方向上运动, 即准一维的 BEC 雪茄型模型<sup>[13]</sup>

$$\begin{aligned} i \frac{\partial u_1}{\partial t} &= -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + V(x) u_1 + (g_{11} |u_1|^2 + g_{12} |u_2|^2) u_1, \\ i \frac{\partial u_2}{\partial t} &= -\frac{\alpha}{2} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + V(x) u_2 + (g_{21} |u_1|^2 + g_{22} |u_2|^2) u_2. \end{aligned}$$

在强横向束缚势 (束缚频率为  $\omega_{\perp}$ ) 下,  $\mu_j(x, t)$  为两组分玻色-爱因斯坦凝聚体分别对应的波函数.  $x, t$  分别是在以  $a_0 = \sqrt{\hbar/(m_1 \omega_{\perp})}$  和  $1/\omega_{\perp}$  为单位测量的. 外加的束缚势取一维谐振子势  $V(x) = x^2/2$ , 其中  $g_{ij} = 2a_{ij}\alpha^{i+j-2}/a_0$ ,  $i, j = 1, 2$ ,  $\alpha = m_1/m_2$ ,  $m_1, m_2$  分别为第一组分和第二组分中粒子的质量,  $a_{ij}$  为  $s$  波散射长度.

收稿日期: 2011-04-15; 修回日期: 2011-08-06

基金项目: 国家自然科学基金 (10972125), 山西省自然科学基金 (2010011001-2) 和山西省留学回国人员科研基金资助项目

作者简介: 周艳珍 (1988-), 女, 硕士, 计算物理, E-mail: zhouyanzhen1988@163.com

$u_j(x, t)$  满足归一化条件  $\int |u_j|^2 dx = N_j$ ,  $N_j$  为各组分子子总数.

## 2 调制不稳定性条件下,共生暗孤子的形成

### 2.1 调制不稳定性条件(MI 条件)

我们考虑稳定的基态(无动力学演化),因此方程(1)相应的非含时定态 GPE 可化为

$$\begin{aligned} 0 &= -\mu_1 u_1 - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + V(x) u_1 + (g_{11}|u_1|^2 + g_{12}|u_2|^2) u_1, \\ 0 &= -\mu_2 u_2 - \frac{\alpha}{2} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + V(x) u_2 + (g_{21}|u_1|^2 + g_{22}|u_2|^2) u_2, \end{aligned} \quad (2)$$

其中  $\mu_{1,2}$  是化学势,在 Thomas-Fermi 近似下,相互作用能远大于动能项,故忽略动能,令  $\partial^2 u_{1,2}/\partial x^2 = 0$ , 方程(2)化为

$$\begin{pmatrix} \mu_1 - V \\ \mu_2 - V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |u_1|^2 \\ |u_2|^2 \end{pmatrix}, \quad (3)$$

对于方程(2)的所有解  $|u_{1,2}|^2$  取决于  $\Delta g = g_{11}g_{22} - g_{12}^2$  的符号<sup>[14]</sup>, 其中当

$$g_{12}^2 > g_{11}g_{22} \quad (4)$$

时,存在分离的解,即第一组分子子数密度和第二组分子子数密度无重叠区域. 条件(4)被称为调制不稳定性条件,即 MI 条件. 文献[15]中对 MI 条件的作用也有大量的研究.

### 2.2 在 MI 条件下,共生暗孤子的形成

2000 年,Phillips 小组在 BEC 中实现了原子暗孤子的产生及其传播<sup>[16]</sup>, Hulet 小组则通过 Feshbach 共振技术将稳定的  $^7\text{Li}$  原子 BEC 中原子之间的排斥相互作用调节至吸引相互作用,从而实现了孤子串的形成及其传播<sup>[17]</sup>. 本文我们通过改变两组分子子 BEC 中组分子子间的散射长度  $a_{12}$  (实验上可用 Feshbach 共振技术来调节散射长度),从而调节  $g_{12}$  来实现暗孤子的形成.

在 MI 条件下,为得到稳定的基态,我们应用虚时演化法,令  $t \rightarrow -i\tau$ , 方程(1)化为

$$\begin{aligned} -\frac{\partial u_1}{\partial \tau} &= -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + V(x) u_1 + (g_{11}|u_1|^2 + g_{12}|u_2|^2) u_1, \\ -\frac{\partial u_2}{\partial \tau} &= -\frac{\alpha}{2} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + V(x) u_2 + (g_{21}|u_1|^2 + g_{22}|u_2|^2) u_2. \end{aligned} \quad (5)$$

在归一化条件下,对此方程组我们利用快速傅里叶方法(FFT)求解基态.

在满足 MI 条件下,下面分两种情况讨论:

#### ① $g_{11} > g_{22}$

以  $u_{10} = u_{20} = (20\pi^{1/4})^{-1} \exp(-x^2/100)$  为初态波函数,在满足 MI 条件下,而且  $g_{11} > g_{22}$ . 我们选  $g_{11} = 300$ ,  $g_{12} = 90$ ,  $g_{22} = 20$  ( $a_{11} = 150a_0$ ,  $a_{12} = 90a_0$ ,  $a_{22} = 40a_0$ ,  $\alpha = 0.5$ ), (实验上可以采用  $^{41}\text{K}$  和  $^{87}\text{Rb}$  原子混合组成的玻色-爱因斯坦凝聚体),利用 FFT 形成稳定的基态,结果如图 1(a) 所示. 然后保持其它参数不变,只改变组分子子间的相互作用强度,使  $g_{12} = -5$ ,以所得到的基态为初态,实时演化形成了暗孤子,且暗孤子只存在于第一组分子子内,第二组分子子中没有暗孤子形成,如图 1(b) ~ (e) 所示. 其中图 1(d) 为  $t = 100$  s 时刻第一组分子子暗孤子的空间分布.

为研究生成的暗孤子在谐振子势阱中周期性的往返对穿运动,且简单起见,我们选择  $g_{11} = 600$ ,  $g_{12} = 37$ ,  $g_{22} = 2$  ( $a_{11} = 300a_0$ ,  $a_{12} = 350a_0$ ,  $a_{22} = 300a_0$ ,  $\alpha = 0.05$ ) (实验上可以采用  $^7\text{Li}$  和  $^{133}\text{Cs}$  原子混合组成的玻色-爱因斯坦凝聚体),初态波函数与图 1(a) 的初态相同. 采用与图 1 相同的计算方法,稳定的基态形成后,如图 2(a) 所示,瞬间使组分子子间的相互排斥力变为相互吸引力 ( $g_{12} = -5$ ),实时演化形成一对速度不为零的暗孤子,速度大小相等、方向相反. 由于谐振子势阱的作用,这对暗孤子都不能无限制的沿原方向运动,而是变为相向运动. 图 2(b) 所示  $t = 0$  s 时刻,第一组分子子中只存在一个暗孤子. 在  $t = 49$  s 时刻,分裂成的两个暗孤

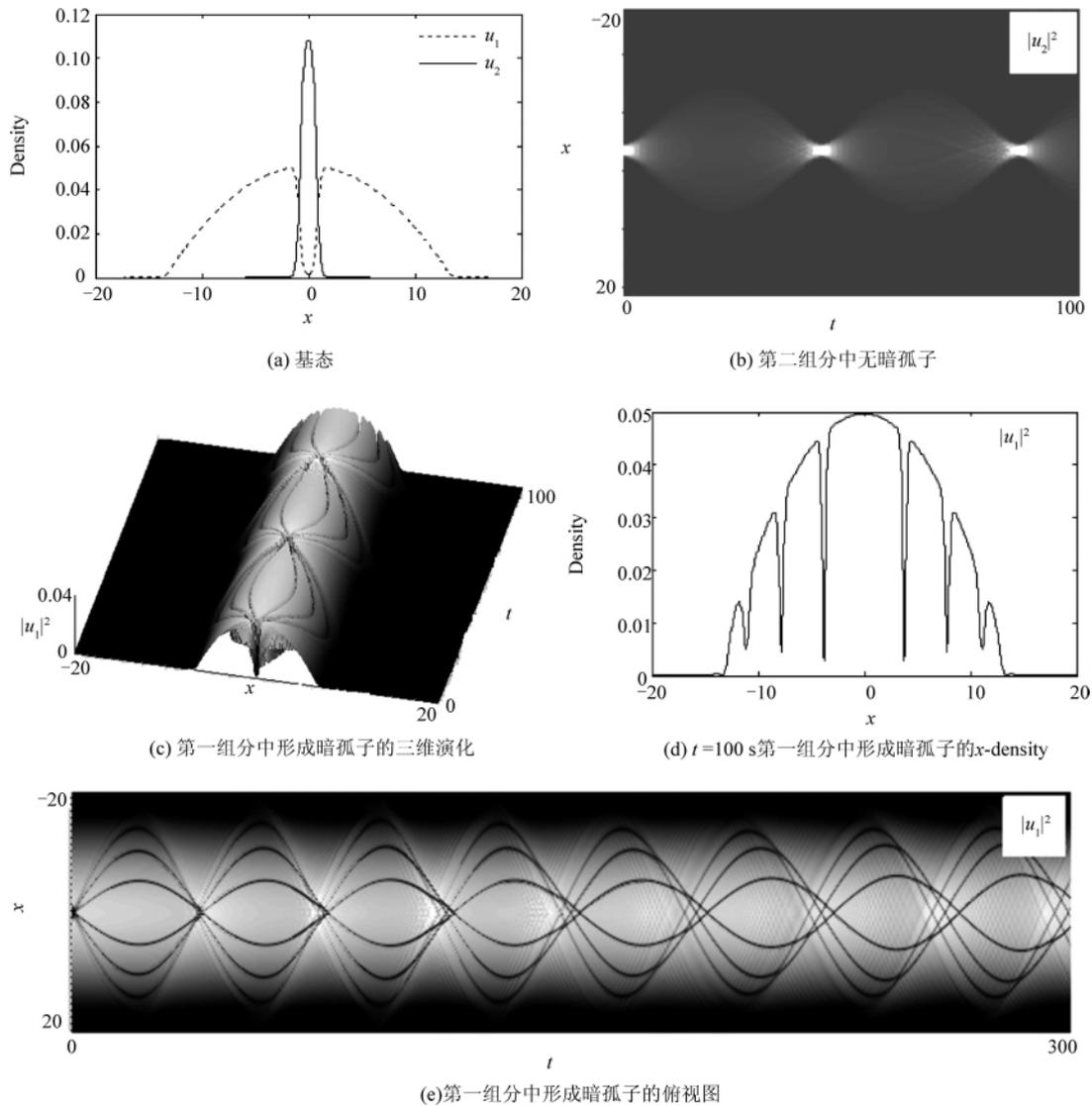


图 1 基态在瞬间改变两组分原子间的相互作用为  $g_{12} = -5$  形成暗孤子随时间的演化  
 Fig.1 Evolution of the ground state after switching interspecies scattering length to  $g_{12} = -5$

子独立存在,如图 2(c). 在  $t = 50$  s 时刻,两个暗孤子合并为一个暗孤子,如图 2(d). 随后  $t = 51$  s 时刻又分裂为两个暗孤子,如图 2(e). 随着时间的演化,这一对暗孤子在谐振子势阱中呈现周期性的往返对穿运动,如图 2(f). 这与文献 [18, 19] 的研究结果是一致的.

②  $g_{11} < g_{22}$

同样我们选取与图 1(a) 相同的初态波函数,在满足 MI 条件下,而且  $g_{11} < g_{22}$ . 选  $g_{11} = 10, g_{12} = 65, g_{22} = 300$  ( $a_{11} = 5a_0, a_{12} = 65a_0, a_{22} = 600a_0, \alpha = 0.5$ ) (实验上可以采用  $^{41}\text{K}$  和  $^{87}\text{Rb}$  原子混合组成的玻色-爱因斯坦凝聚体),采用与①相同的计算方法,稳定的基态形成后,如图 3(a) 所示,瞬间使组分间的相互排斥力变为相互吸引力 ( $g_{12} = -5$ ),实时演化暗孤子只存在于第二组分内,第一组分中没有暗孤子形成,如图 3(b) ~ (d). 其中图 3(c) 为  $t = 100$  s 时刻第二组分暗孤子的空间分布.

### 3 产生的暗孤子与物理量质量和粒子数的关系

首先我们保持粒子数不变  $M = N_1/N_2 = 5/4, m_1 < m_2$ ,改变两组分粒子质量比率  $\alpha = m_1/m_2$ ,数值模拟研究暗孤子的变化(如图 4).

数值模拟结果表明:在保持粒子数不变,  $m_1 < m_2$  的情况下,随着两组分粒子质量比率  $= m_1/m_2$  的增加,

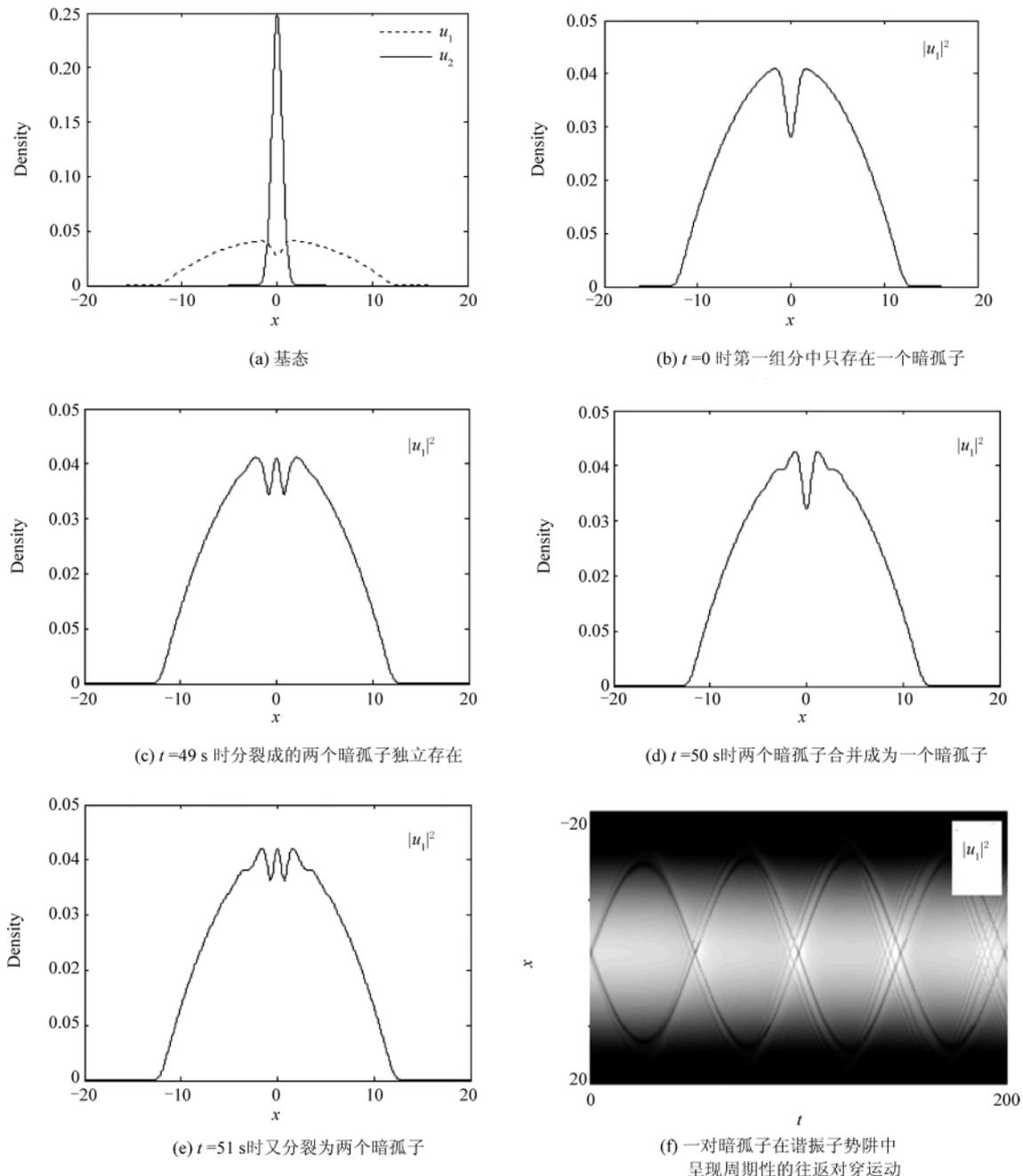


图 2 基态在瞬间改变两组分原子间的相互作用为  $g_{12} = -5$  形成暗孤子随时间的演化

Fig. 2 Evolution of the ground state after switching interspecies scattering length to  $g_{12} = -5$

则形成的基态中一种组分被另一种组分排开的距离增大,改变组分间相互作用系数后形成的暗孤子数目也增加.

如果实验中的玻色-爱因斯坦凝聚体由  ${}^7\text{Li}$  和  ${}^{133}\text{Cs}$  原子混合组成,它们的原子质量比率为  $\alpha = 0.0522$ ,满足我们数值模拟实验的图 4(b) 的参数取值. 同样,如果实验中的玻色-爱因斯坦凝聚体分别由  ${}^{23}\text{Na}$  和  ${}^{223}\text{Fr}$ 、 ${}^7\text{Li}$  和  ${}^{41}\text{K}$ 、 ${}^7\text{Li}$  和  ${}^{23}\text{Na}$ 、 ${}^{133}\text{Cs}$  和  ${}^{223}\text{Fr}$  混合组成,则分别对应原子质量比率为 0.1031、0.1707、0.3901、0.5960 和 0.6541,分别满足我们数值模拟实验的图 4(c) ~ (g) 的参数取值. 所以,实验中只要通过 Feshbach 共振技术调节散射长度,使它们分别满足数值模拟实验中的参数取值,就可以观察到如图 4 所示的不同暗孤子情况<sup>[20]</sup>.

然后,我们再保持两种粒子的质量比不变  $\alpha = 0.6541$ (实验中的玻色-爱因斯坦凝聚体由  ${}^{133}\text{Cs}$  和  ${}^{223}\text{Fr}$  原

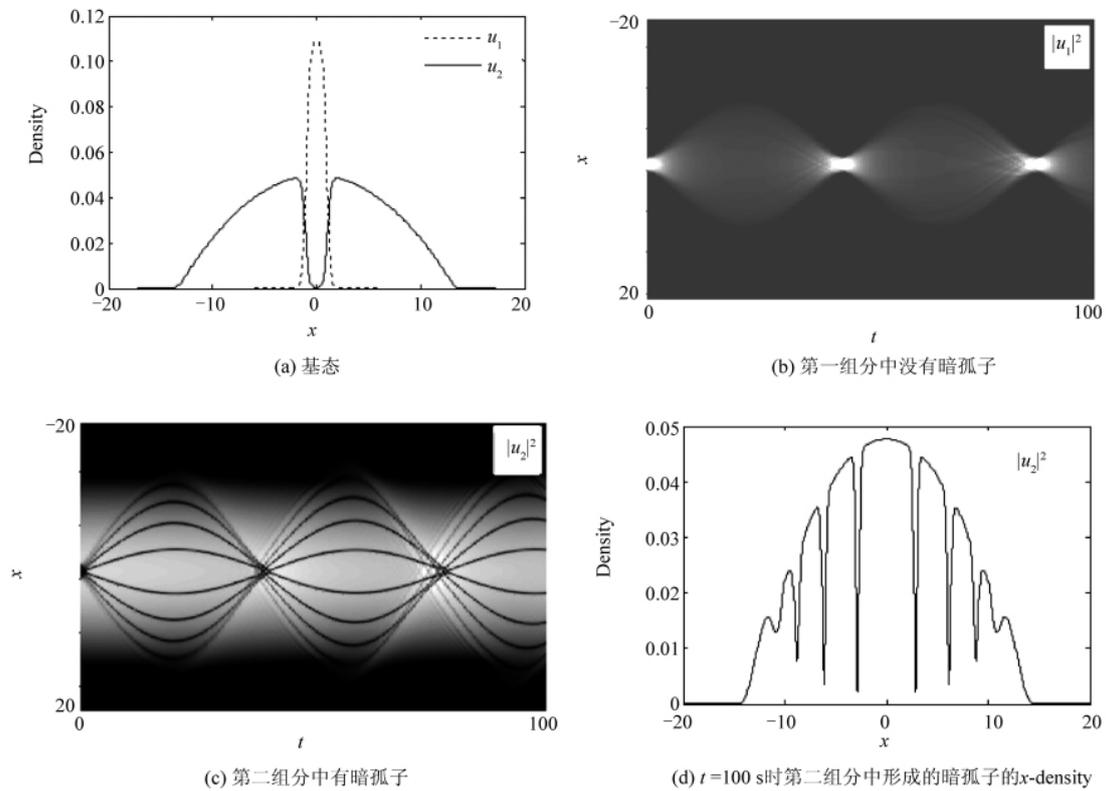


图 3 基态在瞬间改变两组分原子间的相互作用为  $g_{12} = -5$  形成的暗孤子随时间的演化

Fig. 3 Evolution of the ground state after switching interspecies scattering length  $g_{12} = -5$

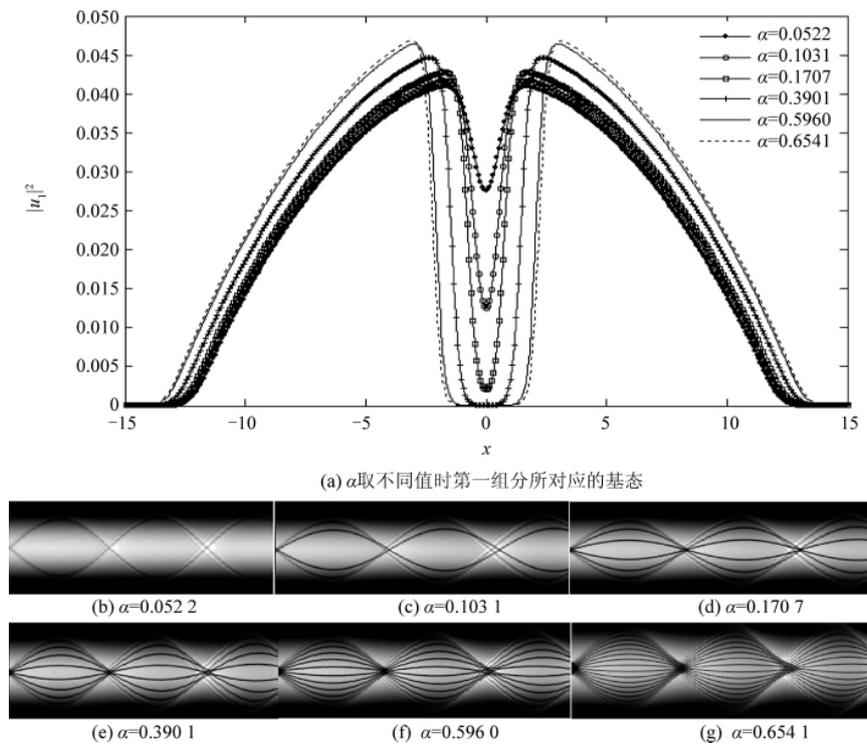


图 4 基态在瞬间改变两组分原子间的相互作用为  $g_{12} = -5$  形成的暗孤子随时间的演化, 其它参数同图 2

Fig. 4 Evolution of the ground state after switching interspecies scattering length  $g_{12} = -5$ , other parameters are the same as in Fig. 2

子混合组成), 改变两组分粒子数比率  $M = N_1/N_2$ , 数值模拟研究暗孤子的变化(如图 5).

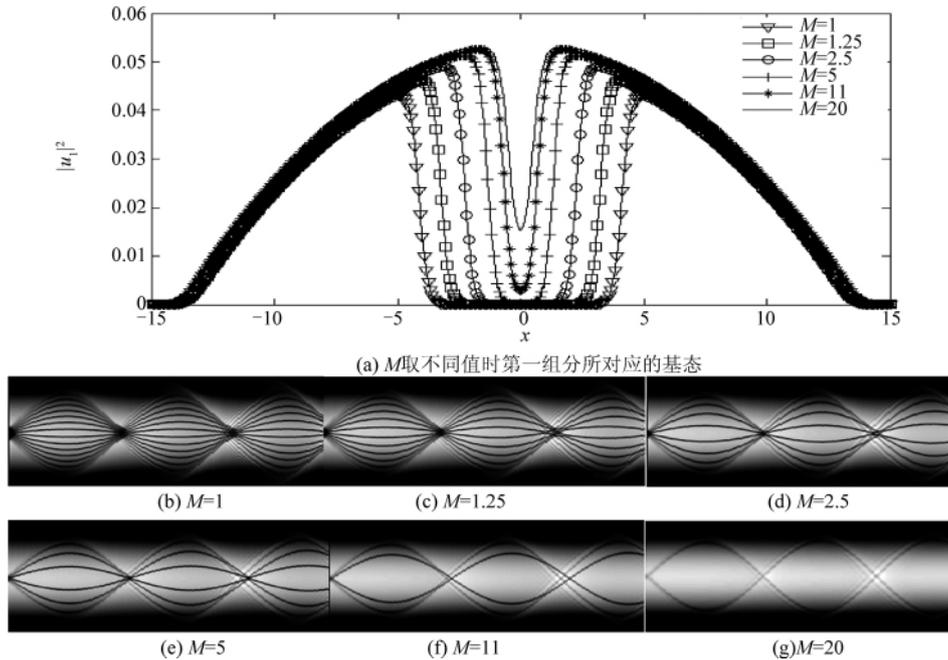


图 5 基态在瞬间改变两组分原子间的相互作用为  $g_{12} = -5$  形成的暗孤子随时间的演化, 其它参数同图 2

Fig. 5 Evolution of the ground state after switching interspecies scattering length to  $g_{12} = -5$ , other parameters are the same as in Fig. 2

数值模拟结果表明, 在保持两种粒子的质量比率不变的情况下, 随着两组分粒子数比率  $M = N_1/N_2$  的增加, 则形成的基态中一种组分被另一种组分排开的距离减小, 改变组分间相互作用系数后形成的暗孤子数目也减少.

#### 4 结论

对准一维异核两组分玻色-爱因斯坦凝聚体在谐振子势阱中运动的研究表明, 在 MI 条件下, 当凝聚体基态形成后, 通过改变组分间的相互作用系数, 自身相互作用系数之间满足一定的关系时, 实时演化, 共生暗孤子只存在于某一组分内, 而且形成的暗孤子在谐振子势阱中呈现周期性的往返对穿运动. 此外, 形成的暗孤子数目与两种粒子的质量比率和粒子数比率存在一定关系. 这对进一步研究暗孤子的性质有重要的意义.

#### 参 考 文 献

- [ 1 ] Busch Th, Anglin J. Dark-bright solitons in inhomogeneous Bose-Einstein condensates [J]. Phys Rev Lett, 2001, **87**: 010401.
- [ 2 ] Fedichev P O, et al. Dissipative dynamics of a kink state in a Bose-condensed gas [J]. Phys Rev A, 1999, **60**: 3220.
- [ 3 ] Jackson A D, et al. Solitary waves in clouds of Bose-Einstein condensed atoms [J]. Phys Rev A, 1998, **58**: 2417 - 2422.
- [ 4 ] Dum R, et al. Creation of dark solitons and vortices in Bose-Einstein condensates [J]. Phys Rev Lett, 1998, **80**: 2972 - 2975.
- [ 5 ] Wu B, Liu J, Niu Q. Controlled generation of dark solitons with phase imprinting [J]. Phys Rev Lett, 2002, **88**: 034101.
- [ 6 ] Burger S, et al. Dark solitons in Bose-Einstein condensates [J]. Phys Rev Lett, 1999, **83**: 5198 - 5201.
- [ 7 ] Denschlag J, et al. Generating solitons by phase engineering of a Bose-Einstein condensate [J]. Science, 2000, **287**: 97 - 98.
- [ 8 ] Anderson B P, et al. Watching dark solitons decay into vortex rings in a Bose-Einstein condensate [J]. Phys Rev Lett, 2001, **86**: 2926 - 2929.
- [ 9 ] Xu Haiqing, Zhong Hongwei, Hu Ke. Hole solitons in an atomic chain with double-well potentials under damping [J]. Chinese J Comput Phys, 2009, **26**(4): 629 - 632.

- [10] Roberts J L , Claussen N R , Burke J P , et al. Resonant magnetic field control of elastic scattering in cold  $^{85}\text{Rb}$  [J]. *Phys Rev Lett* , 1998 , **81**: 5109 – 5112.
- [11] Stenger J , Inoué S , Andrews M R , et al. Strongly enhanced inelastic collisions in a Bose–Einstein condensate near Feshbach resonances [J]. *Phys Rev Lett* , 1999 , **82**: 2422 – 2425.
- [12] Sun Changyong , Zhou Yuxin , Xia Qingfeng , et al. Numerical solution of two-dimensional Gross–Pitaevskii equation for Bose–Einstein condensation in a non-harmonic trap [J]. *Chinese J Comput Phys* , 2009 , **26**( 4 ) : 617 – 623.
- [13] Víctor M Pérez-García , Juan Belmonte Beitia. Symbiotic solitons in heteronuclear multi-component Bose–Einstein condensates [J]. *Phys Rev A* , 2005 , **72**: 033620.
- [14] Trippenbach M , Goral K , Rzazewski K , Malomed B , Band Y B. Structure of binary Bose–Einstein condensates [J]. *Phys B* , 2000 , **33**: 4017 – 4031.
- [15] Kasamatsu K , Tsubota M Multiple domain formation induced by modulation instability in two-component Bose–Einstein condensates [J]. *Phys Rev Lett* , 2004 , **93**: 100402.
- [16] Denschlag J , Simsarian J E , Feder D L , et al. Generating solitons by phase engineering of a Bose–Einstein condensate [J]. *Science* , 2000 , **287**: 97 – 101.
- [17] Strecker K E , Partridge G B , Tmscott A G , Hulet R G. Formation and propagation of matter-wave soliton trains [J]. *Nature* , 2002 , **417**: 150 – 153.
- [18] Novoa D , Malomed B A , Michinel H , et al. Supersolitons: Solitonic excitations in atomic soliton chains [J]. *Phys Rev Lett* , 2008 , **101**: 144104.
- [19] Liu X X , Pu H , Xiong B , et al. Formation and transformation of vector solitons in two-species Bose–Einstein condensates with a tunable interaction [J]. *Phys Rev A* , 2009 , **79**: 013423.
- [20] Kevrekidis P G , Nistazakis H E , Frantzeskakis D J , et al. Families of matter-waves in two-component Bose–Einstein condensates [J]. *Eur Phys J D* , 2004 , **28**: 181 – 185.

## Generation and Properties of Dark Solitons in Heteronuclear Two-component Bose–Einstein Condensates

ZHOU Yanzhen , ZHANG Suying , HAN Wei

( *Institute of Theoretical Physics , Shanxi University , Taiyuan 030006 , China* )

**Abstract:** Generation and properties of dark solitons are studied in detail by means of numerical simulation of quasi one-dimensional heteronuclear two-component Bose–Einstein condensates in syntonc potential. Dark solitons are only induced in one of the condensate components by modulational instability with instantaneous conversion of repulsive interspecies interaction to attraction. Solitons pass through each other periodically in syntonc potential. In addition , the number of dark solitons is affiliated with ratio of particle mass and ratio of particles numbers.

**Key words:** modulational instability; dark solitons; mass of particles; number of particles

Received date: 2011 – 04 – 15; Revised date: 2011 – 08 – 06