

原子动量的量子测量*

张俊香 王军民 杨炜东 张天才

(山西大学光电研究所 太原 030006)

摘要 我们讨论了一个二能级原子与光场相互作用系统, 在远离共振的情况下, 当光子与原子之间发生了动量交换时, 通过对光场与原子之间纠缠态的测量, 得知原子的动量信息。

关键词 动量交换, 量子测量

中图法分类号 O431

原子与光场的相互作用是量子光学研究的重要内容之一, 标准的 Jaynes-Cummings 模型 (JCM)^[1], 提供了对这一问题的精确解。JCM 的进一步发展揭示了许多非经典效应, 如原子崩塌、复原、压缩以及非线性耦合、量子关联等^[2~7], 在以上这些讨论中, 往往都考虑原子的内部自由度与光场的相互作用, 而把原子看作是静止的粒子, 忽略原子的空间自由度, 也即基于以下两个假定:(1) 与光波长比较, 可认为原子的波包宽度很小;(2) 原子沿光腔轴向的运动可以忽略。随着激光冷却与囚禁技术的发展, 冷原子以及超冷原子的获得对标准 JCM 的两个假设提出挑战, Schlicher 首次将 JCM 作了推广, 考虑了原子沿腔轴的运动, 随后一系列的研究业已证明, 原子的外部自由度将影响原子与场的相互作用。^[8~10]

本文将讨论一个二能级原子与单模腔场相互作用系统, 在考虑原子运动与空间分布情形下, 当原子与光场在相互作用过程中发生动量交换时, 光场与原子之间发生纠缠, 光场的位相携带了原子动量信息, 因而通过对光场的测量实现对原子动量的测量。

1 场与原子的相互作用

在旋波近似下, 二能级原子与单模腔场相互作用模型可写为

* 国家青年科学基金(N0.19504008)及山西省青年学术带头人基金资助项目。

收稿日期: 1997-12-05

$$H = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \hbar\omega_0 \hat{S}_z + \hbar\omega_a \hat{a}^\dagger \hat{a} + \hbar\Omega(\hat{a}^\dagger \hat{S}_+ e^{-i\omega t} - \hat{a} \hat{S}_- e^{i\omega t}) \quad (1)$$

其中 \hat{a}^\dagger, \hat{a} 代表单模光场的产生与湮灭算符, ω_0 是其频率, $\hat{S}_+, \hat{S}_-, \hat{S}_z$ 代表跃迁频率为 ω_0 的二能级原子内部动力学的自旋算符, Ω 为拉比频率, \hat{k} 是光波矢量, x, p 为原子在光场中的位置和外部动量算符。

原子的位置与动量之间满足测不准关系 $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$

由于 \hat{H}_0 与 H_i 不对易, 引入一么正算符^[1]

$$U = e^{-i\omega_0 t (\hat{a}^\dagger \hat{S}_z + \hat{a} \hat{S}_+) + i\kappa \hat{k} \cdot \hat{x}} \quad (2)$$

当忽略光子的反弹效应之后, 变换后的哈密顿量为:

$$\tilde{H} = U^\dagger H U = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \hbar\Delta(P) \hat{S}_z + \hbar\Omega(\hat{a}^\dagger \hat{S}_+ + a \hat{S}_-) \quad (3)$$

这里 $\Delta(P) = (\omega_i - \omega_0) - \frac{kp}{m} = \omega_i - [\omega_0 + \frac{kp}{m}]$ 表示原子能级的多普勒移动包含在内。
 $e^{\pm ikx} |p\rangle = |p \pm \hbar k\rangle$

其态矢演化遵循薛定谔方程:

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\tilde{\psi}(t)\rangle = \tilde{H} |\tilde{\psi}(t)\rangle \quad (4)$$

$|\tilde{\psi}(t)\rangle$ 按初始基矢展开为:

$$|\tilde{\psi}(t)\rangle = \int dp \sum \varphi_{p,e,n}(t) |p, e, n\rangle + \varphi_{p-\hbar k, g, n+1}(t) |p - \hbar k, g, n+1\rangle \quad (5)$$

将(3)式代入(4)和(5)式得

$$\begin{cases} \dot{\varphi}_{p,e,n}(t) = -iA\varphi_{p,e,n}(t) - i\sqrt{n+1}\Omega\varphi_{p-\hbar k,g,n+1}(t) \\ \dot{\varphi}_{p-\hbar k,g,n+1}(t) = -iB\varphi_{p-\hbar k,g,n+1}(t) - i\sqrt{n}\Omega\varphi_{p,e,n}(t) \end{cases} \quad (6)$$

$$A = \frac{\hat{p}^2}{2m\hbar} - \Delta(p)$$

$$B = \frac{(p - \hbar k)^2}{2m\hbar} + \Delta(p - \hbar k)$$

方程(6)经 拉氏变换及反演得:

$$\begin{aligned} \varphi_{p,e,n}(t) &= \exp\left(-\frac{i(A+B)t}{2}\right) \cos\left(\frac{t\sqrt{4(n+1)\Omega^2 + (B-A)^2}}{2}\right) \varphi_{p,e,n}(0) \\ &\quad + \frac{i(B-A)}{\sqrt{4(n+1)\Omega^2 + (B-A)^2}} \exp\left(-\frac{i(A+B)t}{2}\right) \\ &\quad \cdot \sin\left(\frac{t\sqrt{4(n+1)\Omega^2 + (B-A)^2}}{2}\right) \varphi_{p,e,n}(0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{2i\sqrt{n+1}\Omega}{\sqrt{4(n+1)\Omega^2 + (B-A)^2}} \exp\left(-\frac{i(A+B)t}{2}\right) \\
& \cdot \sin\left(\frac{t\sqrt{4(n+1)\Omega^2 + (B-A)^2}}{2}\right) \varphi_{p-hk,g,n-1}(0) \\
\varphi_{p-hk,g,n+1}(t) = & \exp\left(-\frac{i(A+B)t}{2}\right) \cos\left(\frac{t\sqrt{4(n+1)\Omega^2 + (B-A)^2}}{2}\right) \varphi_{p-hk,g,n+1}(0) \\
& + \frac{i(B-A)}{\sqrt{4(n+1)\Omega^2 + (B-A)^2}} \exp\left(-\frac{i(A+B)t}{2}\right) \\
& \cdot \sin\left(\frac{t\sqrt{4(n+1)\Omega^2 + (B-A)^2}}{2}\right) \varphi_{p-hk,g,n+1}(0) \\
& - \frac{2i\sqrt{n+1}\Omega}{\sqrt{4(n+1)\Omega^2 + (B-A)^2}} \exp\left(-\frac{i(A+B)t}{2}\right) \\
& \cdot \sin\left(\frac{t\sqrt{4(n+1)\Omega^2 + (B-A)^2}}{2}\right) \varphi_{p-hk,g,n}(0) \quad (7)
\end{aligned}$$

对初始基矢 $\varphi(0)$ 有:

$$\begin{cases} \varphi_{p,e,n}(0) = \varphi_p(0)\varphi_e(0)\varphi_n(0) \\ \varphi_{p-hk,g,n+1}(0) = \varphi_{p-hk}(0)\varphi_g(0)\varphi_{n+1}(0) \end{cases} \quad (8)$$

当光场初始为相干态 $|\alpha\rangle = \sum C_s |n\rangle$ 时, $C_s = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \frac{\alpha^s}{\sqrt{s!}}$, 取 Fock 态为光场的基矢,

则

$$\begin{cases} \varphi_{p,e,n} = \varphi_p(0)\varphi_e(0)C_n(0) \\ \varphi_{p-hk,g,n+1} = \varphi_{p-hk}(0)\varphi_g(0)C_{n+1}(0) \end{cases} \quad (9)$$

2 光场与原子的纠缠

假定失谐量 $\delta\omega = (\omega_r - \omega_a)$ 很大, 即 $\Omega \ll \delta\omega$, 则对下式可取一阶近似:

$$\sqrt{4(n+1)\Omega^2 + (B-A)^2} \approx (B-A) + \frac{2(n+1)\Omega^2}{(B-A)} \quad (10)$$

方程(7)简化为:

$$\begin{cases} \varphi_{p,e,n}(t) = \exp\left(-\frac{i(B-A)t}{2}\right) \exp\left(\frac{i\left[(B-A) + \frac{2(n+1)\Omega^2}{B-A}\right]t}{2}\right) \varphi_{p,e,n}(0) \\ \varphi_{p-hk,g,n+1}(t) = \exp\left(-\frac{i(B-A)t}{2}\right) \exp\left(\frac{i\left[(B-A) + \frac{2(n+1)\Omega^2}{B-A}\right]t}{2}\right) \varphi_{p-hk,g,n+1}(0) \end{cases} \quad (11)$$

联立(11)、(9)、(5)方程得：

$$\begin{aligned} |\tilde{\psi}(t)\rangle &= \int d\rho \exp\left(-i(A+B)t\right) \left[e^{\frac{\Omega^2 t}{B-A}} \cdot \varphi_e(0)\varphi_c(0) \right] |\rho, e\rangle = |\alpha \exp\left(i\frac{\Omega^2 t}{B-A}\right)| \cdot \\ &\quad + e^{\frac{-\Omega^2 t}{B-A}} \varphi_{c-\text{in}}(0) \varphi_e(0) |\rho - \hbar k, g\rangle = |\alpha \exp\left(i\frac{\Omega^2 t}{B-A}\right)| \end{aligned} \quad (12)$$

上述结果表明，初始为 $|\alpha\rangle$ 状态的光场，经过与动量为 ρ 的原子发生相互作用，其状态变为 $|\alpha \exp\left(i\frac{\Omega^2 t}{B-A}\right)|\rangle$ ，光场的位相因子携带着原子动量的信息，也即原子与光场之间发生了纠缠。

例如：可以对光场的正交位相分量 X_u 或 X_v 进行测量，此时

$$\begin{aligned} \langle X_u \rangle &= \langle \alpha + \alpha^\dagger \rangle = \alpha e^{\frac{\Omega^2 t}{B-A}} + \alpha^* e^{-\frac{\Omega^2 t}{B-A}} \\ &\approx 2Re\alpha - 2Im\alpha \cdot \left(\frac{\Omega^2 t}{B-A} \right) \\ \langle X_v \rangle &= 2Re\alpha \end{aligned}$$

所以

$$\langle X_{10} \rangle - \langle X_u \rangle = 2Im\alpha \cdot \left(\frac{\Omega^2 t}{B-A} \right)$$

而

$$\langle \delta X_{10} \rangle = \langle \delta X_{10} \rangle$$

由此我们可看出，光场与原子相互作用后，光场的信噪比降低， $\left(\left(\frac{S}{N}\right)_0\right) < \left(\left(\frac{S}{N}\right)_e\right)$ ，其中降低的量为 $\frac{2\Omega^2 t}{B-A} \cdot Im\alpha$ ，由于 $B-A = 2\delta\omega - \frac{k\rho}{m}(2\rho+1)$ 包含原子动量信息，所以，信噪比的降低量可反映出原子动量的信息。

3 结论

在旋波近似下，一个二能级原子与单模腔场在远离共振情况下，发生相互作用后，原子与光场之间发生了很好的纠缠，通过对光场的测量，（如上例所述，对光场正交位相分量的信噪比的测量）即可描述出原子的空间运动分布。

参考文献

- 1 E. T. Jaynes, F. W. Cummings. *Proc. IEEE.*, 1963, **51**:89
- 2 J. H. Eberly, N. B. Narozhny, J. J. Sanchez-Nondragon. *Phys. Rev. Lett.*, 1980, **44**:1323
- 3 S. Haroche, J. M. Raymond. *Adv. At. Mol. Phys.*, 1985, **20**:347
- 4 S. J. D. Phoenix, P. L. Knight. *Phys. Rev. A*, 1991, **44**:6023
- 5 B. Bock, C. V. Sukumar. *Phys. Rev. Lett.*, 1981, **81A**:132
- 6 W. Vogel, D. G. Welsch. *Phys. Rev. A*, 1989, **40**:7113
- 7 H. I. Yoo, J. H. Eberly. *Phys. Rep.*, 1985, **118**:239
- 8 R. R. Schlicher. *Opt. Commun.*, 1989, **70**:97
- 9 P. Storey, M. Collett, D. Walls. *Phys. Rev. Lett.*, 1992, **68**:472
- 10 A. Vaghe. *Phys. Rev. A*, 1995, **3**:2319
- 11 Wang X. G., Sun C. P. *J. Mod. Opt.*, 1995, **42**:515

Quantum Measurement of Atom Momentum

Zhang Junxiang Wang Junmin Yang Weidong Zhang Tiancai

(Institute of Optoelectronics Shanxi University, Taiyuan 030006)

Abstract

The interaction of a cold atom with a single mode field is studied. In the case of large detuning, the momentum exchanging between atom and field results in the entanglement of atom and light. As a result, the measurement of momentum of atom can be accomplished from the measurement of light field.

Key Words the momentum exchange, quantum measurement