

# 平衡零拍平移测量实验研究\*

李 睿<sup>1)</sup> 翟泽辉<sup>1)†</sup> 赵姝瑾<sup>1)</sup> 郜江瑞<sup>1)2)‡</sup>

1) (山西大学物理电子工程学院,太原 030006)

2) (山西大学光电研究所量子光学与光量子器件国家重点实验室,太原 030006)

(2009 年 12 月 9 日收到;2010 年 3 月 11 日收到修改稿)

利用平衡零拍探测方法对 TEM<sub>00</sub> 模相干光激光束的微小平移进行一维测量的实验研究,实验装置最小可测平移量为 0.3 nm. 实验验证了平移与倾斜这两个物理量之间的共轭关系. 最后用模式重叠的概念分析了本底光偏离标准的 TEM<sub>10</sub> 模对测量结果的影响. 实验结果与理论基本符合.

关键词: 平移测量,平衡零拍,厄米高斯模

PACC: 0630, 4250, 8170G

## 1. 前 言

近年来,空间量子光学效应的研究引起越来越多的研究兴趣并取得很大进展<sup>[1-4]</sup>. 空间量子关联与压缩在生物光子学、激光物理、天文学、量子信息等许多领域具有潜在的应用价值. 另一方面,光学图像作为最重要的传播信息途径之一,在现代信息光学中有大量的研究和应用<sup>[5]</sup>. 随着现代光学探测技术的深入发展,量子噪声对光学图像探测及信息的提取的影响越来越成为一个主要问题. 减小量子噪声影响的方案依赖于从光学图像中所要提取的信息. 采用适当的方法对光场正交分量噪声进行压缩便能够获得光场微小平移量的亚散粒噪声极限的精度测量<sup>[6]</sup>. 由于 TEM<sub>00</sub> 模的准直性非常好,是一个理想的微小平移信息的载体. 用 TEM<sub>00</sub> 模相干光进行平移测量时光子空间分布的随机性引入了光束平移量的量子噪声,从而存在一个其能够测量的最小平移量  $d_{\text{QNL}} = w_0/2\sqrt{N}$  ( $N$  是单位时间内信号光的光子数)<sup>[7]</sup>. 这一精度极限被称为标准量子极限(SQL). 研究表明这一量子极限可以利用多模非经典光场或者 TEM<sub>10</sub> 模压缩态光场来突破<sup>[6-9]</sup>,并

且已经从实验上实现了二维平移噪声低于散粒噪声极限的量子指针<sup>[1]</sup>. 目前在平移测量的实际应用中通常采用多象限探测器. 最近 Bachor 研究小组<sup>[8,9]</sup>的研究表明,这一方法的测量精度仅能达到量子极限精度的 80%,而且需要功率较强的激光. 然而采用 TEM<sub>10</sub> 模作为本底光的平衡零拍探测进行 TEM<sub>00</sub> 模微小平移量的测量能够达到标准量子极限而且对弱光具有较好的响应,并且采用压缩态光场可以实现微小平移的亚散粒噪声测量. 但是由于压缩态光场,尤其是高阶模压缩态光场的产生,需要苛刻的实验条件<sup>[10-13]</sup>,因此采用 TEM<sub>00</sub> 模的相干光作为信号光,TEM<sub>10</sub> 模作为本底光进行平移测量应当是更多应用场合下的更为实际的选择,也是进行平移量子测量研究较好的开端. 本文用 TEM<sub>00</sub> 模相干光作为信号光,TEM<sub>10</sub> 模作为本底光的平衡零拍探测方法对 TEM<sub>00</sub> 模的平移与倾斜进行测量的实验研究.

## 2. 平移量和倾斜量的定义及测量方法

TEM<sub>00</sub> 模的平移与倾斜测量的量子理论已有文献报道<sup>[10,14]</sup>. 如图 1 所示,取一直线为参考轴,TEM<sub>00</sub> 模的腰斑中心距参考轴的距离定义为 TEM<sub>00</sub>

\* 国家自然科学基金(批准号: 60708010, 10774096),国家重点基础研究发展计划(批准号: 2010CB923102)和国家重点实验室开放课题(批准号: 200902)资助的课题.

† 通讯联系人. E-mail: zhzehui@sxu.edu.cn

‡ 通讯联系人. E-mail: jrgao@sxu.edu.cn

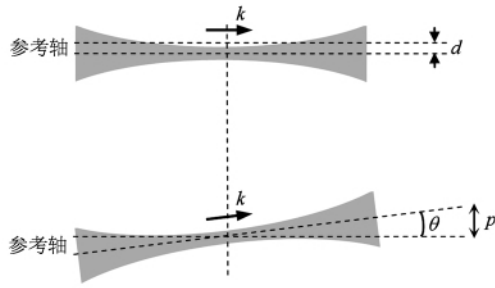


图1 TEM<sub>00</sub>模平移与倾斜示意图

模的平移,用  $d$  表示;倾斜量  $\theta$  定义为光束腰斑处的波矢  $k$  的方向与该参考轴的夹角,可用光束波矢的横向分量来表示:  $k_x = 2\pi\sin\theta/\lambda \approx 2\pi\theta/\lambda$ . 只考虑一维情况时,在量子化描述中具有一定空间分布的光场的正频部分可在正交完备的厄米-高斯模空间展开

$$\hat{E}^+(x) = i \sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\varepsilon_0 c T}} \sum_{n=0}^{\infty} \hat{a}_n u_n(x), \quad (1)$$

其中  $u_n(x) = \left(\frac{2}{\pi w_0^2}\right)^{1/4} \frac{1}{\sqrt{n! 2^n}} H\left(\frac{\sqrt{2}x}{w_0}\right) e^{-x^2/w_0^2}$  ( $n = 0, 1, \dots$ ), 是归一化的  $n$  阶厄米-高斯模空间分布,  $\hat{a}_n$  是  $n$  阶厄米-高斯模的湮没算符,  $T$  为探测时间,  $\omega$  是光场角频率. 在线性化近似下各阶厄米-高斯模的湮没算符可写为场的平均振幅与量子起伏的叠加,即  $\hat{a}_n = \langle \hat{a}_n \rangle + \delta \hat{a}_n$ , 由此(1)式可以写为

$$\hat{E}^+(x) = i \sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\varepsilon_0 c T}} \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \langle \hat{a}_n \rangle u_n(x) + \sum_{n=0}^{\infty} \delta \hat{a}_n u_n(x) \right], \quad (2)$$

另一方面,在经典描述中微小平移与微小倾斜的 TEM<sub>00</sub> 模可作如下泰勒展开:

$$u_{0,d}(x) = u_0(x) + d \frac{\partial u_0}{\partial x} + \dots,$$

$$u_{0,\theta}(x) = u_0(x) + k_x \frac{\partial u_0}{\partial k_x} + \dots, \quad (3)$$

考虑平移量  $d$  和倾斜量  $\theta$  同时不为零的情况并忽略二阶及二阶以上的项,上式可写为

$$u_{0,d,\theta}(x) = u_0(x) + \left(\frac{d}{w_0} + i \frac{\theta}{\theta_D}\right) u_1(x), \quad (4)$$

其中  $w_0$  为 TEM<sub>00</sub> 模的腰斑半径,  $\theta_D = \frac{\lambda}{\pi w_0}$  是 TEM<sub>00</sub>

模的发散角,计算中用到了关系式  $u_1 = w_0 \frac{\partial u_0}{\partial x} = 2xu_0/w_0$ . 由上式可见平移后的光场中一阶模成分的多少与平移量和倾斜量成正比.(4)与(2)式中的

第一项相对应,因此(2)式可表示为

$$\hat{E}^+(x) = i \sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\varepsilon_0 c T}} \left\{ \sqrt{N} \left[ u_0(x) + \left(\frac{d}{w_0} + i \frac{\theta}{\theta_D}\right) u_1(x) \right] + \sum_{n=0}^{\infty} \delta \hat{a}_n u_n(x) \right\}, \quad (5)$$

其中  $N$  是时间  $T$  内探测到的光子数,与光功率  $P$  的关系为  $N = PT/\hbar\omega$ . 可以看出平移后的 TEM<sub>00</sub> 模中 TEM<sub>00</sub> 模和 TEM<sub>10</sub> 模的经典振幅分别为  $\langle \hat{a}_0 \rangle = \sqrt{N}$  和  $\langle \hat{a}_1 \rangle = \sqrt{N} (d/w_0 + i\theta/\theta_D)$ . 因此 TEM<sub>00</sub> 模的平移量和倾斜量与 TEM<sub>10</sub> 模的正交振幅  $X_1^+$  和正交位相  $X_1^-$  之间存在如下关系:

$$\hat{d} = \frac{w_0}{2\sqrt{N}} \hat{X}_1^+,$$

$$\hat{\theta} = \frac{\theta_D}{2\sqrt{N}} \hat{X}_1^-. \quad (6)$$

由此可见通过平衡零拍探测技术检测出平移后的光场中 TEM<sub>10</sub> 模的正交振幅和正交位相就可以推算出平移量与倾斜量. TEM<sub>00</sub> 模的平移与倾斜也是一对共轭量,满足不对易关系  $[\hat{d}, \hat{\theta}] = \frac{i\lambda}{2\pi N}$ . 平衡零拍探测示意图如图 2 所示,一束功率较强的 TEM<sub>10</sub> 模作为本底光,与携带有平移与倾斜信息的 TEM<sub>00</sub> 模光束以相位差  $\varphi_{LO}$  在 50:50 分束器上进行耦合,分别用两个低噪声探测器探测输出光,相减后的光电流可表示为

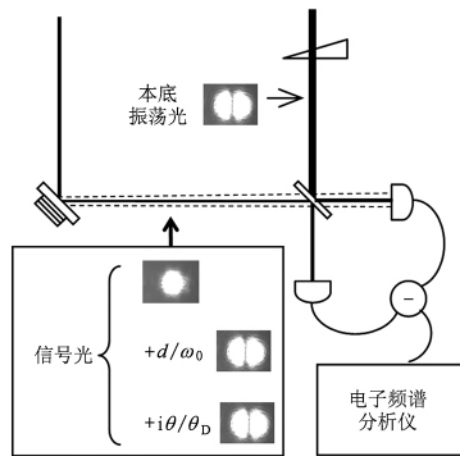


图2 平移与倾斜的平衡零拍探测示意图. 本底光为 TEM<sub>10</sub> 模光. 光束的平移与倾斜由压电陶瓷产生

$$\hat{i} = \frac{\hbar\omega}{2\varepsilon_0 c T} \left[ 2 \sqrt{N N_{LO}} \left( \frac{d}{w_0} \cos\varphi_{LO} + \frac{\theta}{\theta_D} \sin\varphi_{LO} \right) + \sqrt{N_{LO}} \delta \hat{X}_1^{\varphi_{LO}} \right]. \quad (7)$$

这一信号的噪声功率为

$$V(\varphi_{L0}) \propto N_{L0} \left( \frac{\hbar\omega}{2\varepsilon_0 cT} \right)^2 \left[ 4N \left( \frac{d}{w_0} \cos\varphi_{L0} + \frac{\theta}{\theta_D} \sin\varphi_{L0} \right)^2 + \langle \delta^2 \hat{X}_1^{\varphi_{L0}} \rangle \right], \quad (8)$$

当信号光中的 TEM<sub>10</sub> 模为真空态时,  $\langle \delta^2 \hat{X}_1^{\varphi_{L0}} \rangle = 1$ . 信号的信噪比为

$$\text{SNR} = 4N \left( \frac{d}{w_0} \cos\varphi_{L0} + \frac{\theta}{\theta_D} \sin\varphi_{L0} \right)^2. \quad (9)$$

而当在信号光中注入 TEM<sub>10</sub> 模压缩态时 ( $\langle \delta^2 \hat{X}_1^{\varphi_{L0}} \rangle < 1$ ), 信噪比 SNR 将比 TEM<sub>10</sub> 模为真空态时有所提高. 其中(9)式中 N 是时间 T 内探测到的光子数, 而探测时间由电子谱仪精度带宽 RBW 决定 ( $T = 1/\text{RBW}$ ). 考虑到探测器的量子效率  $\eta$  及干涉可见度  $\xi$ <sup>[14]</sup>, 平移和倾斜的信噪比分别为

$$\begin{aligned} \text{SNR}_{\text{平移}} &= 4\eta\xi^2 N \frac{d^2}{w_0^2}, \\ \text{SNR}_{\text{倾斜}} &= 4\eta\xi^2 N \frac{\theta^2}{\theta_D^2}. \end{aligned} \quad (10)$$

由此可以得知可测量的最小平移量  $d_{\min}$  和倾斜量  $\theta_{\min}$  分别为

$$\begin{aligned} d_{\min} &= \frac{w_0}{2\xi \sqrt{\eta N}}, \\ \theta_{\min} &= \frac{\theta_D}{2\xi \sqrt{\eta N}}. \end{aligned} \quad (11)$$

### 3. 实验装置及结果

实验装置如图 3 所示, 采用自制的单频 YVO<sub>4</sub> 激光器为光源(波长 1064 nm), 将输出光分为两束. 为了产生 TEM<sub>10</sub> 模, 将其中一束激光匹配入驻波腔, 调节腔前导光镜的水平旋钮使激光在腔内激发出 TEM<sub>10</sub> 模, 然后把腔长锁定在 TEM<sub>10</sub> 模的透射峰上, 输出作为平衡零拍探测的本底光; 另一束作为携带平移和倾斜信息的信号光与本底光在 50:50 的分束器上干涉, 两束光之间的相位差用 PZT3 调节. 由于所用激光光斑呈椭圆状, 获得干涉可见度  $\xi$  约 85% (调节干涉可见度时将驻波腔腔长锁在 TEM<sub>00</sub> 模上). 为模拟实际应用中的平移与倾斜, 将反射镜片安装在压电陶瓷(PZT)上对信号光进行平移和倾斜调制(图 3). 考虑到机械振动的影响、压电陶瓷的响应频率范围以及探测器带宽范围等因素, 调制频率大约选择在 2 MHz 到 5 MHz 之间. 为检验确实探测

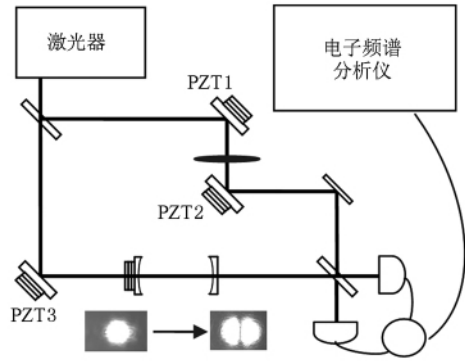


图 3 激光器波长为 1064 nm, PZT1 和 PZT2 用来产生光束的平移与倾斜, PZT3 用来扫描平衡零拍探测本底光与信号光的相对相位

到了平移与倾斜的调制信息而不是正交振幅与正交位相信息, 同时检验光束的平移与倾斜的共轭特性. 我们将两个安装有相同型号压电陶瓷(PZT1 和 PZT2)的平面反射镜置于一个凸透镜(焦距为 150 mm)的前后两个焦点上(图 3), 其中透镜之后的信号光的腰斑在 PZT2 处, 腰斑半径为 761  $\mu\text{m}$ . 这样如果 PZT1 对光束具有平移作用, 那么平移后的光束传播到 PZT2 的镜片时将转变为倾斜信息, 这两个压电陶瓷调制产生的信号互为共轭则证明我们探测到的是平移与倾斜信息而不是通常的平衡零拍探测到的正交分量信息. 在实验中, PZT1 与 PZT2 的调制频率分别为 1.9 MHz 和 2.5 MHz, 扫描本底光与信号光之间的相对相位  $\varphi_{L0}$ , 可以看到当 PZT1 的信号达到最大时, PZT2 的信号达到最小(见图 4), 此时对应的  $\varphi_{L0} = \pi/2$ , 测量到的是倾斜信息; 反之当 PZT1 的信号达到最小时, PZT2 的信号达到最大

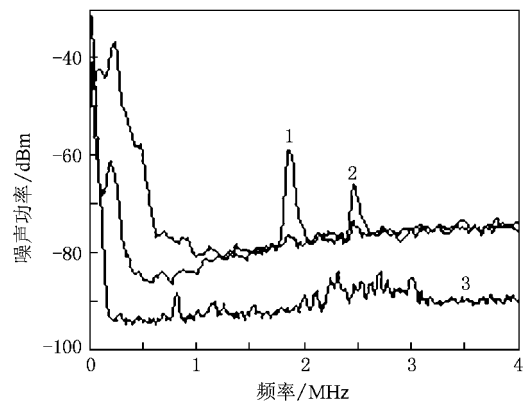


图 4 曲线 1 在 1.9 MHz 处有调制峰; 曲线 2 在 2.5 MHz 处有调制峰; 曲线 3 为电子学噪声

(见图 4), 此时对应的  $\varphi_{LO} = 0$ , 测量到的是平移信息. 两个峰的高度不同是由于两个压电陶瓷在不同频率处的响应不同导致的. 图 5 给出了  $\varphi_{LO}$  在扫描状态下时不同的信号光功率相对应的平移信号及其散粒噪声. 信号光功率逐次增加一倍时 (0.56, 1.25, 2.5 和 4.75 mW), 相应的信噪比也逐次增加 3 dB (9, 12, 15, 18 dB). 这与表达式 (10) 相符合.

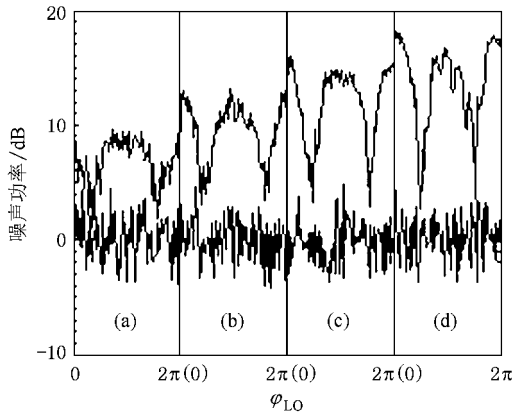


图 5 在不同的功率下扫描相位  $\varphi_{LO}$  时的平移信号 (调制频率为 2.7 MHz, 电子频谱仪 RBW 和 VBW 均为 10 KHz; 上面的曲线为平移信号, 下面的曲线为散粒噪声) (a), (b), (c) 和 (d) 相应的信号光功率分别为 0.56, 1.25, 2.5 和 4.75 mW; 信噪比分别为 9, 12, 15 和 18 dB

$$\text{SNR} = \frac{4N \left[ \Gamma_1^2 \left( \frac{d}{w_0} \cos \theta_{LO} + \frac{\theta}{\theta_D} \sin \theta_{LO} \right)^2 + 2\Gamma_0 \Gamma_1 \cos \theta_{LO} \left( \frac{d}{w_0} \cos \theta_{LO} + \frac{\theta}{\theta_D} \sin \theta_{LO} \right) \right]}{4N\Gamma_0^2 \cos^2 \theta_{LO} + \sum_n \Gamma_n^2 V_n^{\theta_{LO}}}, \quad (12)$$

对于倾斜量的测量, 取  $\theta_{LO} = \pi/2$ , 获得信号的信噪比为

$$\text{SNR}_{\text{倾斜}} = 4N\Gamma_1^2 \theta^2 / \theta_D^2, \quad (13)$$

这里假设了信号光中所有的模式均为真空态, 即有  $\sum_n \Gamma_n^2 V_n^{\theta_{LO}} = 1$ . 可见倾斜信号的信噪比与  $\text{TEM}_{10}$  模在本底光中所占的比例  $\Gamma_1^2$  成正比. 对于平移测量, 取  $\theta_{LO} = 0$ , 获得信号的信噪比为

$$\text{SNR}_{\text{平移}} = \frac{4N [\Gamma_1^2 d^2 / w_0^2 + 2\Gamma_0 \Gamma_1 d / w_0]}{4N\Gamma_0^2 + 1}. \quad (14)$$

与倾斜测量不同的是, 平移测量信噪比会受到本底光中零阶模成份 ( $\Gamma_0$ ) 的影响.  $\Gamma_0$  满足条件  $\Gamma_0 \ll$

依据前述的理论可计算出平移量及最小可测平移量. 以图 5 (d) 为例, RBW 与 VBW 均为 10 KHz, 信号光功率为 4.75 mW, 平移信号的信噪比为 18 dB, 考虑到探测器量子效率 0.8 A/W 和平衡零拍干涉可见度 85%, 可推算得光束的平移量为 2.3 nm, 最小可测平移量为 0.3 nm.

## 4. 讨论与结论

本文中采用压电陶瓷来产生信号光的一维横向 ( $x$  方向) 微小平移, 当然其他两维 ( $y$  方向和  $z$  方向) 也不可避免地存在微小平移, 但是本实验仅仅测量了信号光在  $x$  方向上的微小平移, 因此本文用一维的理论来解释实验结果. 另外, 由于实验中的本底光不可能是标准的  $\text{TEM}_{10}$  模, 下面利用空间模式重叠的概念分析一下本底光偏离标准的  $\text{TEM}_{10}$  模对测量结果的影响. 为此设本底光的归一化空间分布为  $v(x)$ , 它与  $n$  阶厄米-高斯模的重叠度可表示为  $\Gamma_n = \int_{-\infty}^{\infty} v(x) u_n(x) dx$ . 其中  $\Gamma_1$  小于 1 但接近于 1. 采用类似于前面介绍的方法容易计算出平移与倾斜测量的信噪比为

$1/2 \sqrt{N}$  和  $\Gamma_0 \ll d/2w_0$  时, (14) 式可简化为

$$\text{SNR}_{\text{平移}} = 4N\Gamma_1^2 d^2 / w_0^2 \quad (15)$$

在这两个条件下, 平移测量与倾斜测量类似, 其信噪比与本底光中  $\text{TEM}_{10}$  模的光子数占总光子数的比例  $\Gamma_1^2$  成正比. 在我们的实验中  $\text{SNR}_{\text{平移}}$  与光子数  $N$  成正比 (图 5), 由 (14) 式可知满足条件  $4N\Gamma_0^2 \ll 1$ , 即  $\Gamma_0 \ll 1/2 \sqrt{N} = 3.25 \times 10^{-7}$ . 并且从测量结果估计可知  $\frac{d}{2w_0} \approx 1.5 \times 10^{-6}$ , 因此也满足条件  $\Gamma_0 \ll d/2w_0$ . 因此可以相信我们的测量结果接近于真实值.

[1] Treps N, Grosse N, Bowen W P, Fabre C, Bachor Hans-A, Lam P K 2003 *Science* **301** 940

[2] Wagner K, Janousek J, Delaubert V, Zou H, Harb C, Treps N, Morizur J F, Lam P K, Bachor Hans A 2008 *Science* **321** 541

- [3] Boyer V, Marino A M, Pooser R C, Lett P D 2008 *Science* **321** 544
- [4] Kolobov M I 2007 *Quantum imaging* (Springer publishing house).
- [5] Cheng J, Han S S, Yan Y J 2006 *Chin. Phys.* **15** 2002
- [6] Delaubert V, Treps N, Lassen M, Harb C C, Fabre C, Lam P K, Bachor H A 2006 *Phys. Rev. A* **74** 053823
- [7] Fabre C, Fouet J B, A Maitre 2000 *Opt. Lett.* **25** 76
- [8] Treps N, Andersen U, Buchler B, Lam P K, Maitre A, Bachor Hans-A, Fabre C 2002 *Phys. Rev. Lett.* **88** 203601
- [9] Hsu M T L, Delaubert V, Lam P K, Bowen W P 2004 *J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt.* **6** 495
- [10] Lassen M, Delaubert V, Harb C C, Lam P K, Treps N, Bachor Hans-A 2006 *Journal of European Optical Society* **1** 06003
- [11] Delaubert V, Lassen M, Pulford D R N, Bachor Hans -A, Harb C C 2007 *Opt. Expr.* **15** 5815
- [12] Martinelli M, Treps N, Ducci S, Gigan S, Maitre A, Fabre C 2003 *Phys. Rev. A* **67** 023808
- [13] Treps N, Grosse N, Bowen W P, Hsu M T L, Maitre A, Fabre C, Bachor Hans-A, Lam P K 2004 *J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt.* **6** S664
- [14] Zhai Z H, Li Y M, Wang S K, Guo J, Zhang T C, Gao J R, 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 2710 (in Chinese) [翟泽辉、李永明、王少凯、郭娟、张天才、郜江瑞 2005 物理学报 **54** 2710 ]

## Experimental investigation of displacement measurement with homodyne detection\*

Li Rui<sup>1)</sup> Zhai Ze-Hui<sup>1)†</sup> Zhao Shu-Jin<sup>1)</sup> Gao Jiang-Rui<sup>1)2)†</sup>

1) (College of physics and electronic engineering, Shanxi University, Taiyuan 030006, China)

2) (State Key Laboratory of Quantum Optics and Quantum Optics Devices, Institute of Opto-Electronics, Shanxi University, Taiyuan 030006, China)

(Received 9 December 2009; revised manuscript received 11 March 2010)

### Abstract

We report one-dimensional small displacement measurement of TEM<sub>00</sub> mode with balanced homodyne detection. The smallest measurable displacement in our experimental setup is 0.3 nm. The conjugate properties of displacement and tilt are tested. Finally we analyze the effect of the deviation of local oscillator beam from TEM<sub>10</sub> mode on the displacement measurement result. Experimental results are consistent well with the theoretical analyses.

**Keywords:** displacement measurement, homodyne detection, Hermite-Gauss mode

**PACC:** 0630, 4250, 8170G

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 60708010, 10774096), the National Basic Research Program of China (Grant No. 2010CB923102) and open project of state key laboratory (Grant No. 200902).

†Corresponding author. E-mail: zhzehui@sxu.edu.cn, jrgao@sxu.edu.cn