

文章编号: 1007-6654(2013)01-0006-06

## 基于平衡零拍时间测量的位相问题

陈立, 孙恒信, 刘洪雨, 刘奎, 郜江瑞<sup>†</sup>

(山西大学光电研究所, 量子光学与光量子器件国家重点实验室, 山西 太原 030006)

摘要: 文章分析了基于平衡零拍的时间测量的相位问题, 给出了以压缩态作为信号场时的量子标准极限, 并重点讨论了在实际测量中由于系统不稳定而导致信号场与本底场的相对位相抖动对测量结果的影响。结果表明, 利用压缩光的平衡零拍测量, 最佳测量结果的压缩度取决于测量系统的相位稳定性。

关键词: 时间测量; 相对位相抖动; 压缩态; 量子标准极限; 最小可测量; 测量精度; 探测效率

中图分类号: O431 文献标识码: A doi: 10.3788/ASQO20131901.0006

时钟同步问题研究告诉我们发生在不同地点的事件之间的时间顺序和因果关系, 对通信、精密测量以及导航等许多领域都有着非常重要的意义。众所周知, 电磁波可以作为时间/频率信息的载体, 因而在很早以前就已经被应用于时间的测量和校准<sup>[1]</sup>。并且, 利用光谱较宽的光学脉冲可以极大地优化时间测量的精度<sup>[2]</sup>。

目前实验上大都采用时间飞行法(TOF)<sup>[3]</sup>和位相测量法(Phase)<sup>[4-6]</sup>对时间信号进行测量。然而, 由于受到光源本身量子噪声的影响, 测量的精度受到限制, 即经典测量极限(SQL)<sup>[7-11]</sup>。量子光学的飞速发展, 非经典光源的产生<sup>[12-14]</sup>为我们突破经典测量极限瓶颈提供了一种重要的手段和方法。2003年, Seth Lloyd等人提出使用频率纠缠态光场可以优化TOF从而提高时间测量精度<sup>[3]</sup>。2008年, Brahim Lamine等人在理论上证明了平衡零拍探测(BHD)可以获得比TOF和Phase方法更高的时间测量精度, 并且证明在利用压缩态作为信号光场时, 测量精度会成指数上

升<sup>[15]</sup>。这一方案所需的量子频率梳<sup>[16]</sup>已经在实验上获得, 它有望应用于频率标准传输<sup>[17]</sup>及制造更高精度的时间延时器<sup>[18]</sup>, 因而成为目前研究的热点。但是, 在实际BHD测量中, 由于环境噪声, 机械不稳定等因素不可避免地会引入信号场与本底场之间的相对位相抖动, 并且这种抖动对利用非经典光源的量子测量的影响尤为严重。因此, 本文在Brahim Lamine的理论模型基础之上重点分析相对位相抖动对时域BHD测量精度和探测效率的影响。

### 1 基本原理

基于平衡零拍探测系统和时域厄米高斯脉冲的时间测量原理如图1所示<sup>[15]</sup>。A地的脉冲激光器以特定的重复频率发出脉冲, 并将两脉冲的时间间隔同步到A的本地时钟 $\tau$ 上。距离A较遥远的B地采用平衡零拍探测系统对A发来的

收稿日期: 2012-11-27

基金项目: 国家自然科学基金(60978008); 国家重大基础研究计划课题(2010CB923102)

作者简介: 陈立(1987—), 男, 浙江绍兴人, 硕士生, 研究领域: 量子通信与量子测量。E-mail: cl200252@163.com

<sup>†</sup>通讯作者: E-mail: jrgao@sxu.edu.cn

脉冲进行探测。如果 B 能够准确获知每个脉冲到来的时刻并用其校准本地时钟 2, 这样就实现了两个遥远时钟 1 和 2 的时间同步。为实现这一目标, B 地激光器发出的本底光与携带时钟 1 信息的信号光在 50 : 50 的光学分束器 (BS) 上进行

干涉, 然后采用一对平衡零拍探测器对其输出场进行探测。如果信号场脉冲与本底场脉冲有微小的时间差, 则 BHD 就会有相应的信号输出, 这就构成了对时间上信号场的小平移测量。

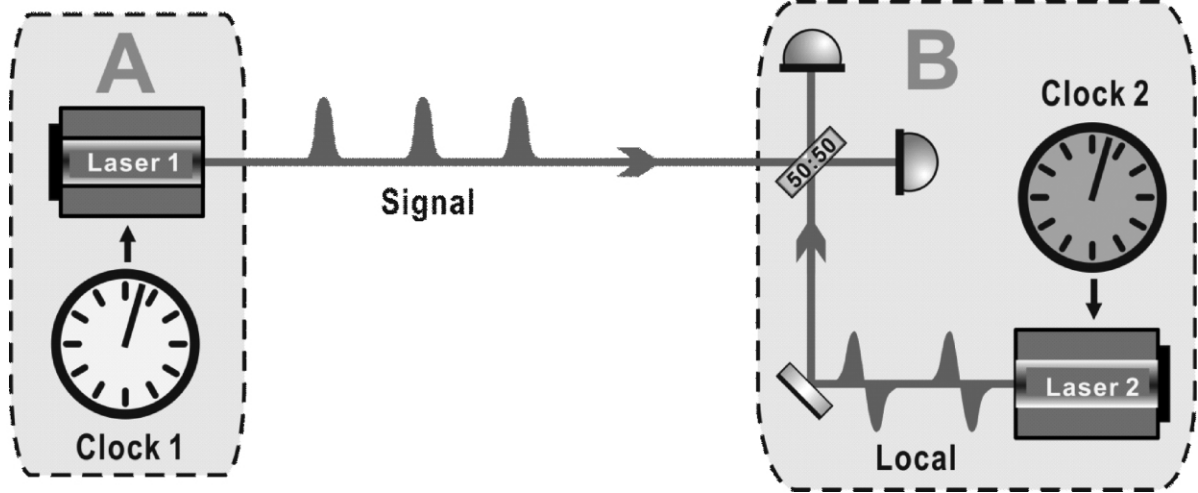


图 1 实验装置图

Fig. 1 The set-up of experiment

量子化后信号场可以表示为:

$$\hat{E}(u) = \xi \sum_n \hat{a}_n v_n(u) e^{i\theta_s} + H. c. \quad (1)$$

$$v_n(u) = g_n(u) \cdot e^{-i\omega_0 u} \quad (2)$$

式中  $u$  为时间变量,  $\xi = i \sqrt{\frac{\hbar \omega_0}{2\epsilon_0 c T}}$  为单光子的量纲,  $T$  为探测器的响应时间,  $\omega_0$  为脉冲的载频,  $\theta_s$  为信号场的总相位。其中  $g_n(u)$  表示第  $n$  阶模式的时间分布。不同阶模式之间彼此正交, 构成一组完备基矢。 $a_n$  为第  $n$  阶模式的湮灭算符。

就测量而言(如图 2 所示), 我们选取 0 阶时域厄米高斯模式作为信号场, 其平均光子数为  $N$ , 则高阶模式都为真空场:

$$\langle \hat{E}(u) \rangle = |\xi| \sqrt{N} v_0(u) e^{i\theta_s} \quad (3)$$

在时域上, 对信号场  $v_0(u)$  的任意微小平移  $\Delta u$  如同一个微弱调制信息一样加载在信号场  $v_0(u)$  上。可在  $u=0$  处, 只考虑信号场的泰勒展开式表示的前两项:

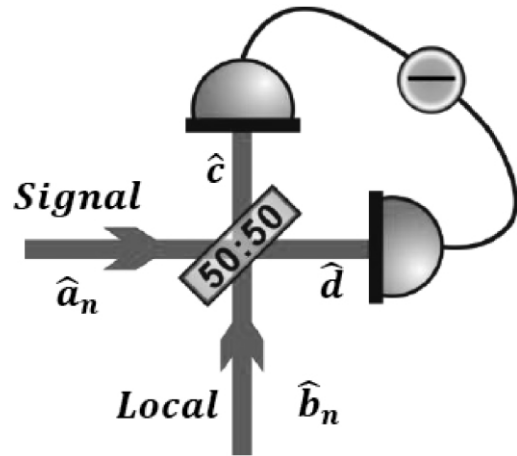


图 2 平衡零拍探测系统

Fig. 2 HBD system

$$\begin{aligned} v_0(u - \Delta u) &\approx v_0(u) - \Delta u \left. \frac{dv_0(u)}{du} \right|_{u=0} \\ &= v_0(u) + \frac{\Delta u}{u_0} w(u) \end{aligned} \quad (4)$$

$$w(u) = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + 1}} (i\alpha v_0(u) + v_1(u)) \quad (5)$$

$$u_0 = \frac{1}{\sqrt{\omega_0^2 + \Delta\omega^2}} \quad \alpha = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} \quad (6)$$

式中  $v_0(u)$  为主要模式,  $w(u)$  为平移后的信号场相对于原来模式激发出来的新模式。由泰勒展开系数可知,  $w(u)$  由两个部分构成: ①与主要模式  $v_0$  相对位相为  $\pi/2$ 、比例为  $\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + 1}}$  基模  $v_0$ ; ②相对位相为 0、比例为  $\frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + 1}}$  的一阶模式  $v_1$ 。 $\alpha$  近似等于一个脉宽内载频的振荡次数, 对于超短飞秒脉冲激光而言, 它大约在  $10^0 \sim 10^2$  量级,  $\Delta\omega$  为脉冲的谱线宽度。新模式  $w(u)$  前的系数  $\Delta u$  反映了平移量的大小, 因此我们称  $w(u)$  为时间模式 (Temporal Mode)。

我们选择与  $w(u)$  相同的模式作为平衡零拍探测的本底场 (Local), 这就实现了对信号场中  $w(u)$  成分的探测, 从而得到  $\Delta u$  的大小, 也即时间平移量的大小。

如图 2 所示, 假设本底场  $w(u)$  的平均光子数为  $N_{LO}$ , 即:  $\langle \hat{E}^{LO}(u) \rangle = |\xi| \sqrt{N_{LO}} w(u) e^{i\theta_{LO}}, \hat{b}_n$  为其场算符。

平衡零拍探测器的输出信号  $\hat{D}$  对应着时间小平移  $\Delta u$  的大小:

$$\begin{aligned} \hat{D} &= |\xi|^2 (\hat{c}^+ \hat{c} - \hat{d}^+ \hat{d}) \\ &= |\xi|^2 \sum_n (\hat{a}_n^+ \hat{b}_n + \hat{b}_n^+ \hat{a}_n) \end{aligned} \quad (7)$$

其平均值为:

$$\langle \hat{D} \rangle = 2 |\xi|^2 \sqrt{NN_{LO}} \left[ \frac{\Delta u}{u_0} \cos\theta + \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + 1}} \sin\theta \right] \quad (8)$$

其中  $\theta = \theta_s - \theta_{LO}$  为信号场与本底场的相对位相。注意, 当 (8) 式第一项  $\frac{\Delta u}{u_0} \cos\theta$  取最大值时为最佳探测, 因此我们需要选取相对位相  $\theta = 0$ , 在这种情况下, (7) 式可化为:

$$\langle \hat{D} \rangle = 2 |\xi|^2 \sqrt{NN_{LO}} \frac{\Delta u}{u_0} \cos\theta \quad (9)$$

$$\Delta \hat{D} = \sqrt{\langle \delta \hat{D}^2 \rangle} = |\xi|^2 \sqrt{\frac{N_{LO}}{1 + \alpha^2} (\alpha^2 \Delta X_0^2 + \Delta Y_1^2)} \quad (10)$$

$\Delta X_0$  和  $\Delta Y_1$  分别表示信号场 0 阶模式的正交位相

噪声和 1 阶模式的正交振幅噪声。

在相干态情形下  $\Delta X_0 = \Delta Y_1 = 1$ 。令信号刚好湮没在噪声之中 ( $\langle \hat{D} \rangle = \Delta \hat{D}$ ), 可得最小可测量, 即量子标准极限 (SQL):

$$\Delta u_{SQL} = \frac{1}{2 \sqrt{N} \sqrt{\omega_0^2 + \Delta\omega^2}} \quad (11)$$

若采用非经典光源, 例如 0 阶和 1 阶模式分别为正交振幅压缩态和正交位相压缩态, 即  $\Delta X_0 = \Delta Y_1 = e^{-r}$ ,  $r$  为压缩因子, 则在此情况下的最小可测量  $\Delta u_{Acc}$  会随压缩因子  $r$  指数减小, 即测量精度会随压缩因子  $r$  指数增大:

$$\Delta u_{Acc} = \frac{1}{2 \sqrt{N} \sqrt{\omega_0^2 + \Delta\omega^2}} \cdot e^{-r} \quad (12)$$

我们将 P. K. Lam 在空间位移测量中探测效率<sup>[9]</sup>的定义推广至时间测量中, 则时间 BHD 的探测效率可定义为:

$$\eta = \frac{\Delta u_{SQL}}{\Delta u_{Acc}} \times 100\% \quad (13)$$

探测效率  $\eta$  将实际情况下能够测得的最小可测量  $\Delta u_{Acc}$  归一化到量子标准极限之上, 它受到系统损耗、位相抖动、模式匹配等因素的影响。 $\eta$  是探测效果的直观衡量, 即  $\eta$  越高, 最小可测量  $\Delta u_{Acc}$  越小, 即测量精度越高。当采用经典光源作为信号场时,  $\eta \leq 100\%$ ; 若采用非经典场 (如压缩态) 作为 HBD 的信号场时, 探测效率有可能大于  $100\%$ 。

## 2 位相抖动分析

这种基于平衡零拍的探测方法, 尤其对于使用非经典光源的情形, 可以大幅度提升探测精度和探测效率。在实际测量中, 测量结果还取决于信号场与本底场的完美干涉程度。因此, 信号场与本底场的相位稳定性会直接影响测量结果。尤其在使用高质量压缩态光场作为信号光的探测过程中, 相对位相抖动会将反压缩分量的噪声耦合进  $\Delta \hat{D}$ , 从而使探测精度和探测效率降低, 接下来我们对这一情形进行具体分析。

假设信号场与本底场的相对位相随机抖动幅度为  $\Delta\theta$ , 平衡零拍探测器的输出信号为:

$$\langle \hat{D} \rangle = 2 |\xi|^2 \sqrt{NN_{LO}} \frac{\Delta u}{u_0} \cos(\theta + \Delta\theta) \quad (14)$$

$$\Delta \hat{D} = |\xi|^2 \sqrt{N_{LO}} \sqrt{\frac{1}{1+\alpha^2} K_1 + \frac{\alpha}{1+\alpha^2} K_2} \quad (15)$$

$$K_1 = \Delta X_1^2 \cos^2(\theta + \Delta\theta) + \Delta Y_1^2 \sin^2(\theta + \Delta\theta) \quad (16)$$

$$K_2 = \Delta Y_0^2 \cos^2(\theta + \Delta\theta) + \Delta X_0^2 \sin^2(\theta + \Delta\theta) \quad (17)$$

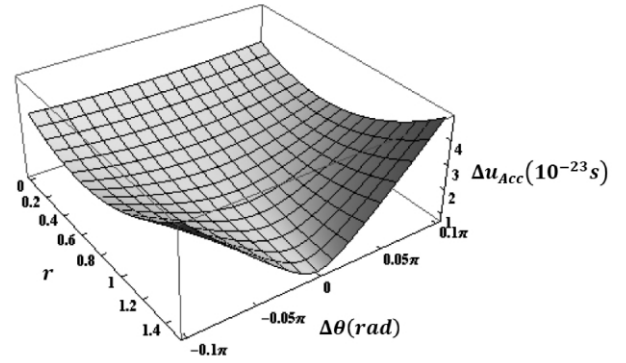
(15)式说明信号场 0 阶、1 阶模式的正交分量噪声  $\Delta X^2$  和  $\Delta Y^2$  对探测结果都有影响。我们同样选取 0 阶模式为正交位相压缩态、1 阶模式为正交振幅压缩态 ( $\Delta Y_0 = \Delta X_1 = e^{-r}$ ,  $\Delta X_1 = \Delta Y_0 = e^r$ ), 并选取最优探测情形  $\theta = 0$ , 则此时的最小可测量和探测效率分别为:

$$\Delta u_{Acc} = \frac{u_0}{2\sqrt{N}} \cdot \sqrt{e^{-2r} + \tan^2 \Delta\theta \cdot e^{2r}} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{\Delta u_{SQL}}{\Delta u_{Acc}} \times 100\% \\ &= \frac{1}{\sqrt{e^{-2r} + \tan^2 \Delta\theta \cdot e^{2r}}} \times 100\% \quad (19) \end{aligned}$$

可见,位相抖动对最小可测量和探测效率皆有影响。反压缩分量噪声对  $\Delta u_{Acc}$  和  $\eta$  的影响由相对位相抖动幅度  $\Delta\theta$  决定。图 3、4 为信号场平均功率取 10 mW、中心波长 850 nm、脉冲宽度 10 fs、重复频率 10 kHz 的情况下最小可测量  $\Delta u_{Acc}$  和探测效率  $\eta$  随  $\Delta\theta$ 、 $r$  的变化趋势。若  $\Delta\theta = 0$ , 则(14) (15) (16)式分别与(10) (11) (12)式相同;在  $\Delta\theta$  不为零的情形下,压缩  $e^{-2r}$  和反压缩  $e^{2r}$  对探测结果呈现相反的影响,此时探测精度和探测效率并不随压缩因子  $r$  增大而一直增大,而是在特定的  $r$  下会取到最优值。例如当  $\Delta\theta = 0.05\pi$  时,  $\Delta u_{Acc}$  和  $\eta$  在  $r = 0.92$  处取到最优值,最小可测量约为  $1.87 \times 10^{-23}$  s,探测效率约为 178%。

图 5 对比了不同压缩因子  $r$  的情形下  $\eta$  随  $\Delta\theta$  的变化,三条曲线都随  $\Delta\theta$  的增大而下降,但敏感程度不同。 $r$  越大,  $\eta$  随  $\Delta\theta$  变化越敏感。可见,当位相抖动幅度  $\Delta\theta > 0.04\pi$  时,采用  $r = 1.5$  (虚线)的压缩态光源进行探测,其结果已经不如  $r = 0.8$  (点线)的情形。并且,当  $\Delta\theta > 0.07\pi$  时,  $r =$

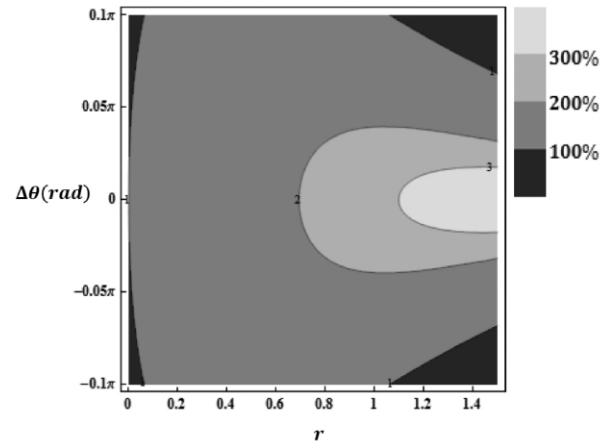


信号场平均功率 10 mW, 中心波长 850 nm,

脉冲宽度 10 fs, 重复频率 10 kHz

图 3 最小可测量  $\Delta u_{Acc}$  变化趋势

Fig. 3 The variation of minimum measurable time when light power is 10 mW, center wavelength is 850 nm, pulse duration is 10 fs and repetition is 10 kHz.



信号场平均功率 10 mW, 中心波长 850 nm

脉冲宽度 10 fs, 重复频率 10 kHz

图 4 探测效率  $\eta$  变化趋势

Fig. 4 The variation of detecting efficiency when light power is 10 mW, center wavelength is 850 nm, pulse duration is 10 fs and repetition is 10 kHz.

1.5 情形的探测效率会低于采用经典光源(实线)的情形。那么此时使用非经典光源作为信号场的时间 BHD 探测精度没有提升反而有所降低。因此,当我们在使用压缩态光场进行时域 BHD 测量时,必须考虑系统 Local 与 Signal 之间的相对相位是否能够长期锁定在较小的范围之内,否

则会适得其反。

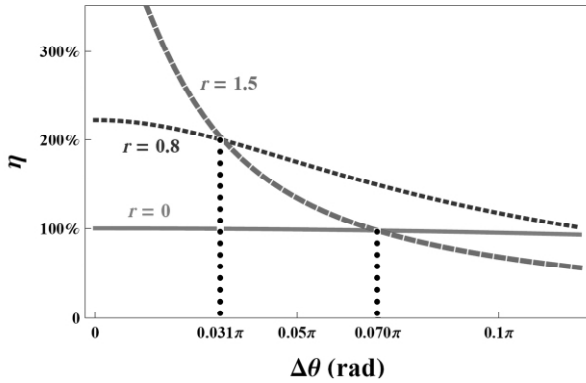


图5 信号场取不同  $r$  时,探测效率  $\eta$  的变化趋势

Fig. 5 The variation of detecting efficiency with different  $r$

### 3 讨论和总结

在基于 HBD 的时间测量中,利用压缩态提高测量精度,压缩度越大,其对测量系统的稳定性要求越高。压缩度越大,反压缩分量噪声越大,相位不稳定带来的反压缩噪声分量影响越大。

在时间传输和时钟同步<sup>[17]</sup>的实际应用中,脉冲光的传输距离较长,光源自身的位相稳定性较难长时间保持,因而其对测量所带来的影响是不可忽视的。本文对基于平衡零拍的时间测量进行了计算和分析,详细讨论了系统相对位相抖动对探测精度和探测效率的影响。这一工作对时间同步测量,尤其是在利用非经典光源作为信号场的时间测量方面有重要的意义和实际应用价值。

### 参考文献:

- [1] Anom. The Space Issue on Time and Frequency [J]. *Proc IEEE*, 1991, **79**: 891-1079.
- [2] JAEKEL M-T, REYNAUD S. Time-Frequency Transfer with Quantum Fields [J]. *Phys Rev Lett*, 1996, **76**: 2407-2411.
- [3] GIOVANNETTI V, LLOYD S, MACCONE L. Quantum-enhanced Positioning and Clock Synchronization [J]. *Nature*, 2003, **412**: 417-419.
- [4] CAVES C M. Quantum-mechanical Noise in Interferometer [J]. *Phys Rev D*, 1981, **23**: 1693-1708.
- [5] JAEKEL M-T, REYNAUD S. Quantum Limits in Interferometric Measurements [J]. *Europhys Lett*, 1990, **13**: 301-306.
- [6] HONG C K, OU Z Y, MANDEL L. Measurement of Subpicosecond Time Intervals Between two Photons by Interference [J]. *Phys Rev Lett*, 1987, **59**: 2044-2046.
- [7] FABRE C, FOUET J B, MAITRE A. Quantum Limits in the Measurement of Very Small Displacements in Optical Images [J]. *Opt Lett*, 2000, **25**: 76-78.
- [8] TREPS N, ANDERSER U, BUCHLER B, *et al.* Surpassing the Standard Quantum Limit for Optical Imaging Using Nonclassical Multimode Light [J]. *Phys Rev Lett*, 2002, **88**: 203601.
- [9] HSU M T L, DELAUBERT V, LAM P K, *et al.* Optimal Optical Measurement of Small displacement [J]. *J Opt B*, 2004, **6**: 495-501.
- [10] DELAUBERT V, TREPS N, FABRE C, *et al.* Quantum Limits in Image Processing [J]. *Europhys Lett*, 2008, **81**: 44001.
- [11] DELAUBERT V. Quantum Imaging with a Small Number of Transverse Modes [D]. THESIS PH D. Universite Pierre et Marie Curie. 2007.
- [12] WU L A, KIMBLE H J, HALL J L, *et al.* Generation of Squeezed States by Parametric Down Conversion [J]. *Phys Rev Lett*, 1986, **57**: 2520-2523.
- [13] HEIDMANN A, HOROWICZ R J, REYNAUD S, *et al.* Observation of Quantum Noise Reduction on Twin Laser Beams [J]. *Phys Rev Lett*, 1987, **59**: 2555-2557.

- [14] OU Z Y, PEREIRA S F, KIMBLE H J, *et al.* Realization of the Einstein-Podolsky-Rosen paradox for continuous variables [J]. *Phys Rev Lett*, 1992, **68**: 3663-3666.
- [15] LAMINE B, FABRE C, TREPS N. Quantum Improvement of Time Transfer Between Remote Clocks [J]. *Phys Rev Lett*, 2008, **101**: 123601.
- [16] PINEL O, JIAN P, ARUJO R M, *et al.* Generation and Characterization of Multimode quantum Frequency Combs . [J]. *Phys Rev Lett*, 2012, **108**: 083601.
- [17] LUDLOW A D, ZELEVINSKY T, *et al.* Sr Lattice Clock at  $1 \times 10^{-16}$  Fractional Uncertainty by Remote Optical Evaluation with a Ca Clock [J]. *Science*, 2008, **315**: 1805-1808.
- [18] JIANG S. F, TREPS N, FABRE C. A Time/frequency Quantum Analysis of the Light Generated by Synchronously Pumped Optical Parametric Oscillators [J]. *N J Phys*, 2012, **14**: 043006.

## The Influence of Phase Fluctuations on Temporal Measurement with Homodyne Detection

CHEN Li, SUN Heng-xin, LIU Hong-yu, LIU Kui, GAO Jiang-rui

(State Key Laboratory of Quantum Optics and Quantum Optics Devices, Institute of Opto-Electronics of Shanxi University, Taiyuan, Shanxi 030006, China)

**Abstract:** This paper proceeds as follow. To theoretically analyze the influence of phase fluctuations on time measurement based on homodyne detection. It is discussed then that the result is different as the system changes. Beyond Standard Quantum Limit (SQL) with non-classical light source in measurement. The measurement is still very sensitive to the relative phase fluctuations between signal and local beam, especially in the case of large squeezing. The best squeezing depends on the relative phase fluctuation.

**Key words:** temporal measurement; relative phase fluctuations; squeezed states; standard quantum limit; accuracy; detecting efficiency