

三模相互作用非经典性的理论研究*

张天才 谢常德 彭堃堃

(山西大学光电研究所, 太原 030006)

摘 要

本文通过严格求解腔内三模作用的 Fokker-Planck 方程, 分析了单模与双模辐射场出现非经典性的判据和条件以及双模非经典性与双模强度相关的内在关联, 并首次对该过程所产生的双模强度差压缩与耦合模正交位相振幅分量压缩进行了系统的比较。

关键词 光的非经典性、正交位相振幅分量压缩、强度差压缩

自从 HBT 实验^[1]首次打破传统的光学局限以后, 人们对光的本性的认识大大向前迈进了一步。光的非经典性引起人们的极大关注, 已经发现了光的反聚束、亚 Poisson 分布及光场压缩态等多种形式的非经典光场。其中, 采用参量过程产生压缩态光场是一种重要的方法。

几个研究小组已经从理论和实验上证明, 通过腔内非简并参量下转换, 能产生双模正交位相振幅分量压缩(以下简称正交压缩)和强度差压缩^[2,3]。Perina^[4] 以及 Haul^[5] 等也曾讨论过三模作用过程, 但他们只是讨论暂态过程中信号模和耦合模的压缩与反聚束效应, 没有考虑过程中信号模的损耗等因素的影响, 也没有从非经典性判据出发分析场相关性与双模非经典性之间的关系。就我们所知, 迄今为止, 尚无人对腔内三模作用过程中亚谐波模及耦合模的非经典性进行系统分析, 也未对两种类型压缩态的产生条件及参量依赖关系进行比较。本文在只考虑抽运场绝热近似的情况下, 通过严格求解 Fokker-Planck 方程 (F-P 方程), 讨论了信号模和耦合模的统计性质。运用单模与双模辐射场的非经典性判据, 分析了信号模及信号与闲置耦合模出现非经典性的深度, 指出双模非经典性是由双模强度相关(光子数相关)而产生的。从 Mandel^[6] 的非经典判据入手, 我们发现信号模虽然不存在任何形式的压缩, 但在抽运场很强时仍会出现光子反聚束效应, 这与文献[4]在讨论暂态过程中得到的结果类似。在此基础上, 我们还比较了双模强度差压缩与正交压缩随各种参数的变化情况, 从理论上证实在相同条件下, 强度差压缩总是比正交压缩强, 并通过数值计算获得产生两种压缩态的最佳参数。我们的讨论不仅深化了对非简并参量过程辐射场非经典性的认识, 而且为产生两类压缩态的实验

1992-07-23 收稿, 1992-11-19 收修改稿。

* 国家自然科学基金和山西省自然科学基金资助项目。

系统设计提供了具体的理论参考。

1 理论模型

考虑具有频率为 ω_0 的相干抽运场 ε 入射到一光学谐振腔内, 与置于腔内的非线性介质发生相互作用, 产生频率简并、偏振非简并的参量下转换光场 a_1, a_2 。如果不考虑腔的失谐, 系统的哈密顿量可以写成

$$H = 2\hbar\omega_0 a_0^\dagger a_0 + \hbar\omega_1 a_1^\dagger a_1 + \hbar\omega_2 a_2^\dagger a_2 + i\hbar\kappa/2 \cdot (a_0 a_1^\dagger a_2^\dagger - a_0^\dagger a_1 a_2) \\ + i\hbar\varepsilon [a_0^\dagger \exp(-2i\omega t) - a_0 \exp(2i\omega t)] + \sum_{i=0}^2 (a_i \Gamma_i^\dagger - a_i^\dagger \Gamma_i), \quad (1)$$

其中 ω 是信号模的频率, a_i, a_i^\dagger 是第 i 个模的湮没与产生算符 ($i=0, 1, 2$), κ 为耦合系数, ε 正比于相干驱动场的振幅, $\Gamma_i, \Gamma_i^\dagger$ 代表系统的热浴算符。采用标准的量子统计方法, 并引入广义 P 表示, 可以得到如下的 F-P 方程^[7]:

$$\frac{\partial P(\bar{\alpha})}{\partial t} = \left[-\frac{\partial}{\partial \alpha_0} (\varepsilon - \gamma_0 \alpha_0 + \kappa \alpha_1 \alpha_2) - \frac{\partial}{\partial \alpha_0^\dagger} (\varepsilon - \gamma_0 \alpha_0^\dagger + \kappa \alpha_1^\dagger \alpha_2^\dagger) \right. \\ - \frac{\partial}{\partial \alpha_1} (-\gamma_1 \alpha_1 + \kappa \alpha_0 \alpha_2^\dagger) - \frac{\partial}{\partial \alpha_1^\dagger} (-\gamma_1 \alpha_1^\dagger + \kappa \alpha_0^\dagger \alpha_2) \\ - \frac{\partial}{\partial \alpha_2} (-\gamma_2 \alpha_2 + \kappa \alpha_0 \alpha_1^\dagger) - \frac{\partial}{\partial \alpha_2^\dagger} (-\gamma_2 \alpha_2^\dagger + \kappa \alpha_0^\dagger \alpha_1) \\ \left. + \frac{\partial^2}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2} \kappa \alpha_0 + \frac{\partial^2}{\partial \alpha_1^\dagger \partial \alpha_2^\dagger} \kappa \alpha_0^\dagger + \sum_{i=0}^2 \gamma_i n_i^{\text{th}} \frac{\partial^2}{\partial \alpha_i^\dagger \partial \alpha_i} \right] P(\bar{\alpha}), \quad (2)$$

其中 $\bar{\alpha} = [\alpha_0, \alpha_0^\dagger, \alpha_1, \alpha_1^\dagger, \alpha_2, \alpha_2^\dagger]$ 。直接求解这个方程是困难的。我们考虑抽运场的损耗比信号场的损耗大得多, 同时常温下热平均光子数 $n_i^{\text{th}} = (e^{\hbar\omega/kT} - 1)^{-1} \ll 1$, 方程(2)可以简化为

$$\frac{\partial P(\bar{\alpha})}{\partial t} = \left[-\frac{\partial}{\partial \alpha_1} (-\gamma_1 \alpha_1 + \kappa \alpha_0 \alpha_2^\dagger) - \frac{\partial}{\partial \alpha_1^\dagger} (-\gamma_1 \alpha_1^\dagger + \kappa \alpha_0^\dagger \alpha_2) \right. \\ - \frac{\partial}{\partial \alpha_2} (-\gamma_2 \alpha_2 + \kappa \alpha_0 \alpha_1^\dagger) - \frac{\partial}{\partial \alpha_2^\dagger} (-\gamma_2 \alpha_2^\dagger + \kappa \alpha_0^\dagger \alpha_1) \\ \left. + \frac{\partial^2}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2} \kappa \alpha_0 + \frac{\partial^2}{\partial \alpha_1^\dagger \partial \alpha_2^\dagger} \kappa \alpha_0^\dagger \right] P(\bar{\alpha}), \quad (3)$$

其中 $\alpha_0 = (\varepsilon - \kappa \alpha_1 \alpha_2) / \gamma_0$, $\alpha_0^\dagger = (\varepsilon - \kappa \alpha_1^\dagger \alpha_2^\dagger) / \gamma_0$ 。

我们可以求出(3)式的稳态解, 进而研究场的统计性质。方程(3)中令 $\partial P / \partial t = 0$, 并假定 $\gamma_1 = \gamma_2$, 通过计算可以得到如下稳态解^[8,9]:

$$P(\bar{\alpha}) = A \cdot \exp[\phi(\bar{\alpha})], \quad (4)$$

其中

$$\phi(\bar{\alpha}) = 2\alpha_1 \alpha_1^\dagger + 2\alpha_2^\dagger \alpha_2 + \left(\frac{2\gamma_0 \gamma_1}{\kappa^2} - 1 \right) \ln(\kappa \alpha_1 \alpha_2 - \varepsilon) \\ + \left(\frac{2\gamma_0 \gamma_1}{\kappa^2} - 1 \right) \ln(\kappa \alpha_1^\dagger \alpha_2^\dagger - \varepsilon). \quad (5)$$

A 是归一化因子,由下式确定:

$$\int P(\bar{\alpha})d\mu(\bar{\alpha}) = 1, \tag{6}$$

故

$$A = \left[\int \exp[\psi(\bar{\alpha})d\mu(\bar{\alpha})]^{-1}. \tag{7}$$

2 光场的统计性质

对于任意正规排列的量 $a_1^+ a_1^m a_1^n a_2^+ a_2^n a_2^m$, 其平均值为

$$\langle a_1^+ a_1^m a_1^n a_2^+ a_2^n a_2^m \rangle = \int (\alpha_1^+ \alpha_1)^m (\alpha_2^+ \alpha_2)^n P(\bar{\alpha})d\mu(\bar{\alpha}) = A I_{mn}, \tag{8}$$

其中

$$I_{mn} = \int (\alpha_1^+ \alpha_1)^m (\alpha_2^+ \alpha_2)^n \exp[\psi(\bar{\alpha})]d\mu(\bar{\alpha}). \tag{9}$$

积分(9)式可以通过适当的变换求得(见附录),下面给出前几项的结果:

$$I_{00} = A^{-1} = \frac{N_0}{[\Gamma(q+2)]^2} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{[(q+2)_p]^2} \cdot u^{2p}, \tag{10}$$

$$I_{10} = I_{01} = \frac{2N_0(u/2)^2}{[\Gamma(q+3)]^2} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{p+1}{[(q+3)_p]^2} \cdot u^{2p}, \tag{11}$$

$$I_{20} = I_{02} = \frac{N_0 u^4}{2[\Gamma(q+4)]^2} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{p+1}{p![(q+4)_p]^2} \cdot u^{2p}, \tag{12}$$

$$I_{11} = \frac{N_0 u^2}{4[\Gamma(q+3)]^2} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(p+1)^2}{[(q+3)_p]^2} \cdot u^{2p}, \tag{13}$$

其中 $u = 2\varepsilon/\kappa$, $N_0 = (\varepsilon/\kappa)^2 \varepsilon^{2q} (q!)^2$, 综合参数 $q = 2r_0 r_1 / \kappa^2 - 1$. 采用同样的方法可以证明:

$$\begin{aligned} \langle a_1 \rangle &= \langle a_2 \rangle = 0, \\ \langle (a_1)^2 \rangle &= \langle (a_2)^2 \rangle = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_{12} = \langle a_1 a_2 \rangle &= \frac{N_0 u}{2\Gamma(q+2)\Gamma(q+3)} \\ &\cdot \sum_{p=0}^{\infty} \frac{p+1}{(q+2)_p (q+3)_p} \cdot u^{2p}. \end{aligned} \tag{14}$$

2.1 单模非经典性判定

文献[10]研究了该系统中信号模正交位相振幅分量的起伏,指出信号模在任何情况下不存在压缩,其噪声一般处于相干态噪声.但是我们发现它们并不等同于一般经典光场,在一定运转条件

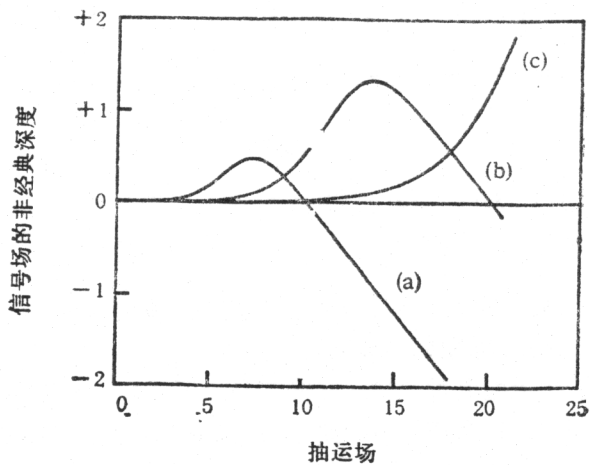


图1 信号场的非经典深度与抽运场的关系 $\kappa = 1$; (a) $\varepsilon^{th} = 5$, (b) $\varepsilon^{th} = 10$, (c) $\varepsilon^{th} = 20$

下,显示非经典性特征.

对于单模场,其非经典性判据为^[6]

$$D^{(2)} = \langle n^{(2)} \rangle - \langle n \rangle^2 < 0, \quad (15)$$

其中 $\langle n^{(2)} \rangle = \langle a^+ a^+ a a \rangle$. 对信号模我们得到

$$D_1^{(2)} = (I_{00} I_{20} - I_{10}^2) / I_{00}^2. \quad (16)$$

图 1 绘出了不同阈值下信号模的 $D_1^{(2)}$ 随抽运场 ε 变化的关系. 从图中可以看出,随着抽运场 ε 的增加, $D_1^{(2)}$ 从 0 开始缓慢增加,在达到一定值以后开始下降,并在二倍阈值处出现 $D_1^{(2)} < 0$,以后随着泵浦场的增加,其非经典性逐渐加深.

事实上,对单模场来说,并非经典性判据与其二阶相干度 $g_1^{(2)}(0) < 1$ 的判据是一样的. 因为

$$g_1^{(2)}(0) = \frac{\langle a_1^{+2} a_1^2 \rangle}{\langle a_1^+ a_1 \rangle^2} = \frac{I_{20} I_{00}}{I_{10}^2}. \quad (17)$$

如果 $D_1^{(2)} < 0$, 即 $I_{00} I_{20} < I_{10}^2$, 则 $g_1^{(2)}(0) < 1$. 因此,信号模存在非经典性在此即意味着信号模自身存在光子反聚束 (photon antibunching) 效应.

2.2 双模非经典性判定

1990 年, Ching Tsung Lee^[11] 研究了双模压缩态并提出了判定双模辐射场出现非经典性的判据:

$$D_{12}^{(2)} = \langle n_1^{(2)} \rangle + \langle n_2^{(2)} \rangle - 2\langle n_1 n_2 \rangle < 0. \quad (18)$$

$D_{12}^{(2)}$ 越小,非经典深度越深.

现采用这一判据来讨论我们的系统. 利用上面的讨论:

$$\langle n_1^{(2)} \rangle = \langle n_2^{(2)} \rangle = I_{20} / I_{00},$$

$$\langle n_1 n_2 \rangle = I_{11} / I_{00},$$

故

$$D_{12}^{(2)} = 2(I_{20} - I_{11}) / I_{00}. \quad (19)$$

图 2 中绘出了 $D_{12}^{(2)}$ 在几个不同阈值下随抽运场 ε 变化的关系. 我们看到, $D_{12}^{(2)}$ 始终小于 0 (在 $\varepsilon = 0$ 时为 0). 也就是说,信号模与闲置模构成的双模辐射场永远是非经典场. 其非经典性随

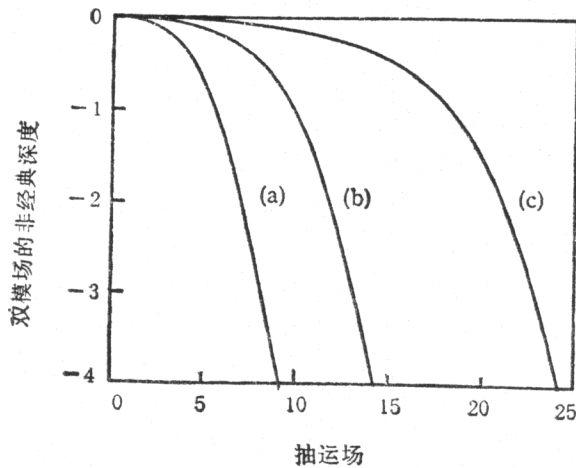


图 2 双模辐射场非经典深度与抽运场的关系
 $\kappa = 1$; (a) $\varepsilon^{th} = 5$, (b) $\varepsilon^{th} = 10$, (c) $\varepsilon^{th} = 20$

着抽运场的增加而不断加深. 系统的振荡阈值越小,其非经典性越强.

2.3 光子对间的强度相关

正如上面所讨论的,非简并参量下转换中产生的信号场和闲置场自身的非经典性远不如它们形成的耦合模的非经典性强,甚至在信号场和闲置场自身完全不存在非经典性的情况下,其耦合模也表现出强烈的非经典性. 导致这一结果的原因是双模光子对同时产生与湮灭,具有极强的光子数相关性或简称强度相关. 这一相关可以由下面的量表征^[12]:

$$C = 2[\langle a_1^+ a_1 a_2^+ a_2 \rangle - \langle a_1^+ a_1 \rangle \langle a_2^+ a_2 \rangle] = 2(I_{00} I_{11} - I_{10}^2) / I_{00}^2. \quad (20)$$

图 3 给出了强度相关与双模非经典性的关系。不难看出，强度相关越强，其非经典性越深。随着强度相关的增强，二者之间的关系几乎是线性的。这说明耦合模之间的量子相关是造成双模非经典性的物理根源。

3 双模正交压缩与双模强度差压缩的比较

3.1 双模正交压缩

由信号模与闲置模组成的耦合模定义为^[10]

$$d = (a_1 + a_2)/\sqrt{2};$$

$$d^+ = (a_1^+ + a_2^+)/\sqrt{2}, \quad (21)$$

其可测正交分量为

$$D_+ = 1/2 \sqrt{2} \cdot (a_1 + a_2 + a_1^+ + a_2^+),$$

$$D_- = 1/2 \sqrt{2} i \cdot (a_1 + a_2 - a_1^+ - a_2^+), \quad (22)$$

则

$$\langle (\Delta D_+)^2 \rangle = 1/4 + (I_{10} + I_{12})/2I_{00},$$

$$\langle (\Delta D_-)^2 \rangle = 1/4 + (I_{10} - I_{12})/2I_{00}. \quad (23)$$

正交位相分量 D_- 当其起伏小于 1/4 时出现压缩,其压缩量为

$$S_p = \frac{1/4 - \langle (\Delta D_-)^2 \rangle}{1/4}. \quad (24)$$

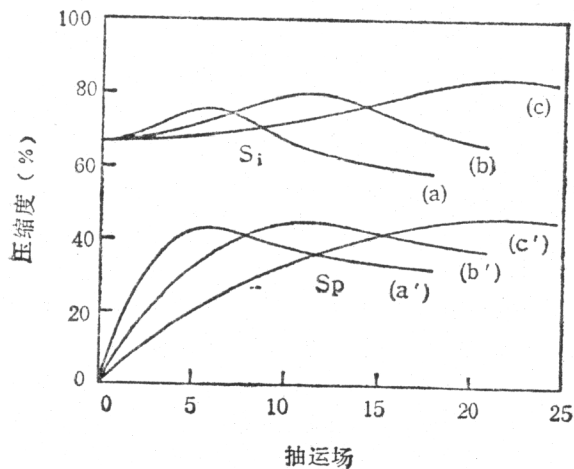


图 4 双模正交压缩 S_p 与双模强度差压缩 S_i 在不同阈值下随抽运场变化的比较

$\kappa = 1$; (a), (a') $s^{th} = 5$, (b), (b') $s^{th} = 10$, (c), (c') $s^{th} = 20$

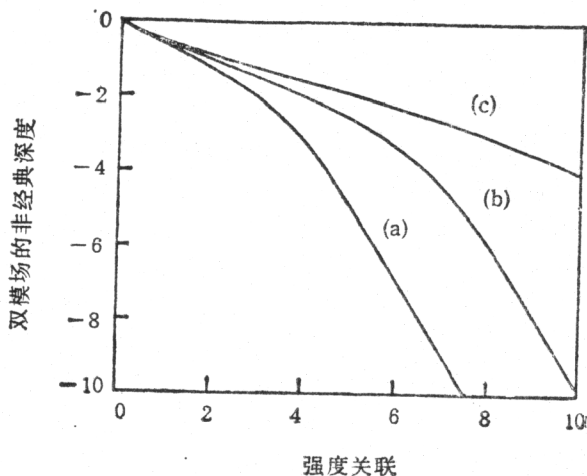


图 3 双模辐射场的非经典深度与光子对之间的强度关联的关系

$\kappa = 1$; (a) $s^{th} = 5$, (b) $s^{th} = 10$, (c) $s^{th} = 20$

3.2 双模强度差压缩

考虑信号模与闲置模光子数差 $(I_1 - I_2)$ 的起伏

$$\langle \Delta^2(I_1 - I_2) \rangle = \langle (I_1 - I_2)^2 \rangle - \langle I_1 - I_2 \rangle^2 = 2(I_{20} + I_{10} - I_{11})/I_{00}. \quad (25)$$

根据文献[13], 信号模与闲置模“混合”场的噪声起伏 $\langle \Delta^2(I_1 + I_2) \rangle$ 为散粒噪声基准,这一散粒噪声为

$$\langle \Delta^2(I_1 + I_2) \rangle = \langle (I_1 + I_2)^2 \rangle - \langle I_1 + I_2 \rangle^2 = 2(I_{20} + I_{11} + I_{10})/I_{00} - 4(I_{10}/I_{00})^2, \quad (26)$$

故双模强度差压缩的压缩量为

$$S_i = \frac{\langle \Delta^2(I_1 + I_2) \rangle - \langle \Delta^2(I_1 - I_2) \rangle}{\langle \Delta^2(I_1 + I_2) \rangle}. \quad (27)$$

由图 4 中我们对这两种压缩作了比较。随着抽运场的增强,两种压缩都开始增大,在阈值附近达到最大压缩。随后二者开始缓慢减小。阈值越高,其最大压缩量有所增加,同时所需要的抽运场也必须增强。比较 (a) (a')、(b)(b')、(c)(c') 三组曲线,我们看出,两者几乎同时达到最大压缩度。我们发现在 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时, $S_i = 66.7\%$,也就是说,只要抽运场存在,那么强度差压缩就一定存在并具有较大压缩。在 $\varepsilon = 0$ 时, $\langle \Delta^2(I_1 + I_2) \rangle = \langle \Delta^2(I_1 - I_2) \rangle = 0$,此时强度差压缩失去意义。而当 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时,正交压缩为 0。在任何情况下,强度差压缩均比正交压缩大得多,而且前者比后者变化缓慢,在阈值以下更为明显。以 $\varepsilon^{th} = 5$ 为例, $S_{i,max} \approx 75\%$,而 $S_{p,max} \approx 42\%$ 。当 ε 降到 2.5 时, S_i 只降到 70%,而 S_p 降为 30%。

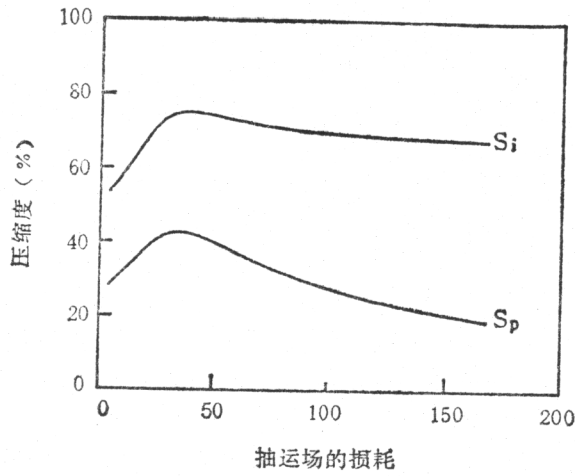


图 5 在一定条件下双模正交压缩 S_p 与双模强度差压缩 S_i 与内腔抽运场损耗的关系
 $\kappa = 2, \varepsilon = 5, \gamma_1 = 1$

在图 5—7 中,我们绘出了其它参数一定的情况下,两种压缩分别与 γ_0, γ_1 以及 κ 的关系。显然,这三者都存在一个对应于最大压缩的最佳值。例如,当 $\varepsilon = 5, \gamma_1 = 1, \kappa = 2$ 时,对应于双模正交压缩和强度差压缩的最佳 γ_0 分别为 35.5 和 39.0。

就物理实质而言,强度差压缩只涉及光场的强度起伏,与位相无关。在参量下转换过程中,光子是成对产生并成对湮灭,在大于腔的平均寿命 $(\frac{1}{2} \gamma_1)$ 的时间间隔内信号模和闲置模

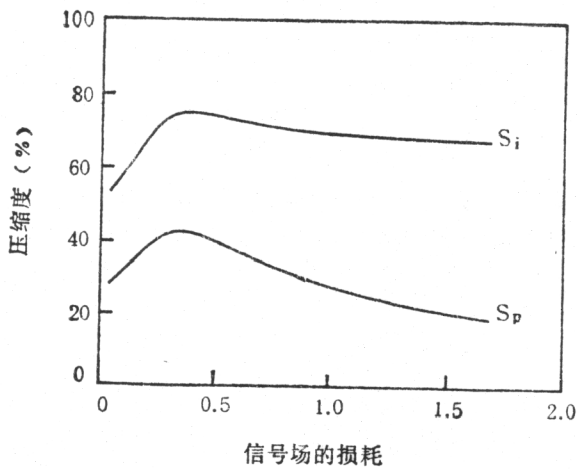


图 6 在一定条件下双模正交压缩 S_p 与双模强度差压缩 S_i 与内腔信号场损耗的关系
 $\kappa = 2, \varepsilon = 5, \gamma_0 = 100$

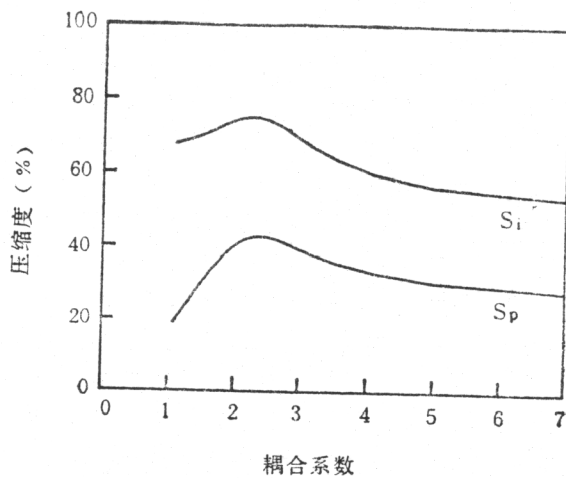


图 7 在一定条件下双模正交压缩 S_p 与双模强度压缩 S_i 与耦合系数的关系
 $\varepsilon = 5, \gamma_0 = 100, \gamma_1 = 0.5$

具有相同的光子数统计。因此,在理想情况下(无腔内损耗、探测效率为 1),强度差的量子噪声可以被完全抑制^[3],且对抽运场强度、耦合参量及腔的品质因数等依赖性不强。而正交压缩对位相却有很强的依赖性^[3,12],上述各种因数均对它有较大影响。

4 结 论

本文在一定条件下通过严格求解腔内偏振非简并参量相互作用的 Fokker-Planck 方程,讨论了信号场与闲置场的统计行为。我们得到信号场在一定条件下(抽运场大于 2 倍阈值)存在光子反聚束效应。这说明信号场也不是完全的经典场。由信号模和闲置模组成的双模辐射场无论在何种情况下均存在非经典性。随着抽运场的增加,非经典性也增强。双模非经典性是双光子对之间强烈的强度相关即光子数相关的直接结果。

我们的计算结果说明,在相同条件下,强度差压缩比正交压缩强得多,因而前者比后者易于实现,即是说在实验上获得大的正交压缩量比获得大的强度差压缩量更为困难。这一点与实验结果一致。对比两类压缩态的实验,不难看出产生正交压缩在许多方面的要求比产生强度差压缩苛刻得多^[2,3]。但两者又相互关联,从图 4—7 可以看出,获得两类压缩最大值的参量条件几乎是一致的,即在同一系统中两者同时达到最大值。这说明我们可以设计一套实验装置产生两类压缩态。

参 考 文 献

- [1] Hanbury-Brown, R., Twiss, R. Q., *Nature*, 1956, 178: 1046.
- [2] Pereira, S. F., Peng, K. C., Kimble, H. J., in *Coherence and Quantum Optics IV* (eds. Eberly, J. H. et al.), Plenum Press, N. Y., 1990, 889; Zhang Tiancai, Xie Changde, Peng Kunchi. *Acta Physics Sinica*, 1992, 1; Kunchi Peng, Changde Xie, Maoquan Huang et al., Presented on 92nd International Symposium on Advanced Topics of Quantum Physics, Shanxi, and will appear in the proceeding of ISATQP-Shanxi'92.
- [3] Reynaud, S., Fabre, C., Giacobino, E., *J. Opt. Am., B*, 1987, 4: 1520.
- [4] Perina, J., Perinova, V., Kodousek, J., *Opt. Commun.*, 1984, 49: 210.
- [5] Paul, H., *Reviews of Modern Physics*, 1982, 54: 1061.
- [6] Mandel, L., *Opt. Lett.*, 1979, 4: 205.
- [7] Drummond, P. D., Gardiner, C. W., *J. Phys.*, 1980, A13: 2353.
- [8] Louisell, W. J., *Quantum Statistical Theory of Radiation*, Wiley, New York, 1973.
- [9] McNeil, K. J., Gardiner, C. W., *J. Phys.*, 1983, A28: 1560.
- [10] Zhang Tiancai, Xie Changde, Peng Kunchi, *Acta Optica Sinica*, 1993, 13 to be published.
- [11] Ching Tsung Lee, *Phys. Rev.*, 1990, A42: 1068.
- [12] Barnett, S. M., Knight, P. L., *J. Mod. Opt.*, 1987, 34: 841.
- [13] Heidmann, A., Horowicz, K. J., Reynaud, S. et al., *Phys. Rev. Lett.*, 1987, 59: 2555.
- [14] *Handbook of Mathematical Functions*: (eds. Abramowitz, M., Stegun, I. A.), Dover, New York, 1970.

附 录

下面我们求积分(9)式,并以 I_{00} 为例推导(10)式。(9)式为

$$I_{mn} = \int (\alpha_1^\dagger \alpha_1)^m (\alpha_2^\dagger \alpha_2)^n \exp[\psi(\bar{\alpha})] d\mu(\bar{\alpha}). \quad (\text{A1})$$

作变换:

$$t = \alpha_1^\dagger, \quad v = \alpha_2, \quad x = (\kappa/\delta)\alpha_1\alpha_2, \quad y = (\kappa/\delta)\alpha_1^\dagger\alpha_2^\dagger. \quad (\text{A2})$$

$$I_{mn} = \left(\frac{\delta}{\kappa}\right)^{m+n+2} \delta^{2a} \int \left(\frac{t}{v}\right)^{m-n} x^m y^n (x-1)^a (x-1)^a \exp\left[ux \frac{t}{v} + uy \frac{v}{t}\right] \frac{d\bar{x}}{t\delta}, \quad (\text{A3})$$

其中 $u = 2\theta/\kappa$, 综合参数 $q = 2r_0 r_1/\kappa^2 - 1$, $d\bar{x} = dx dy dv$. 再令

$$z = (\kappa/\theta)zv, \quad w = v/\theta. \quad (\text{A4})$$

并对 z 积分, 则 (A3) 式变为

$$I_{mn} = (\theta/\kappa)^{m+n+2\theta^2 q} \int w^{m-n-1} x^m y^n (1-x)^q (1-y)^q \exp[uwx + (u/w)y] dx dy dw. \quad (\text{A5})$$

利用公式^[14]

$$[\Gamma(b-a)\Gamma(a)]/\Gamma(b)M[a, b; c] = \int t^{a-1}(1-t)^{b-a-1} e^{ct} dt, \quad (\text{A6})$$

其中 $\Gamma(a)$ 等为 Γ 函数. $M(a, b; c)$ 为 Kummer 函数

$$M(a, b; c) = 1 + \frac{a}{b}c + \frac{(a)_2}{(b)_2} \frac{c^2}{2!} + \dots + \frac{(a)_n}{(b)_n} \frac{c^n}{n!} + \dots, \quad (\text{A7})$$

$$(a)_0 = 1, \quad (a)_n = a(a+1)(a+2)\dots(a+n-1). \quad (\text{A8})$$

对 x, y 积分, (A5) 式变为

$$I_{mn} = N_0 \left(\frac{\theta}{\kappa}\right)^{m+n} \frac{\Gamma(m+1)\Gamma(n+1)}{\Gamma(m+q+2)\Gamma(n+q+2)} \int w^{m-n-1} M[m+1, m+q+2; uw] \cdot M[n+1, n+q+2; u/w] dw, \quad (\text{A9})$$

其中 $N_0 = (\theta/\kappa)^{2\theta^2 q} (q!)^2$. 下面以 I_{00} 为例推导(10)式, 由 (A9) 式得

$$I_{00} = N_0 / [\Gamma(q+2)]^2 \int w^{-1} M[1, q+2; uw] \cdot M[1, q+2; u/w] dw. \quad (\text{A10})$$

利用 (A7) 式,

$$\begin{aligned} M[1, q+2; uw] &= 1 + uw/(q+2) + u^2 w^2 / [(q+2)(q+3)] \\ &\quad + u^3 w^3 / [(q+2)(q+3)(q+4)] + \dots, \\ M[1, q+2; u/w] &= 1 + u/[w(q+2)] + u^2/[w^2(q+2)(q+3)] \\ &\quad + u^3/[w^3(q+2)(q+3)(q+4)] + \dots. \end{aligned}$$

于是不难得到 (A10) 式中积分式 $w^{-1} M[1, q+2; uw] \cdot M[1, q+2; u/w]$ 展开式中 w^{-1} 的系数为

$$\begin{aligned} &1 + [u/(q+2)]^2 + [u^2/(q+2)(q+3)]^2 + [u^3/(q+2)(q+3)(q+4)]^2 + \dots \\ &= \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{[(q+2)_p]^2} \cdot u^{2p}. \end{aligned} \quad (\text{A11})$$

利用残数理论(这里奇点为 $w=0$), (A10) 式的结果为

$$I_{00} = \frac{N_0}{[\Gamma(q+2)]^2} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{[(q+2)_p]^2} \cdot u^{2p}, \quad (\text{A12})$$

其它 I_{mn} 可通过完全类似的方法求得.