山西大学学报(自然科学版)25(2):120～123,2002
Journal of Shanxi University(Nat. Sci. Ed.)

文章编号:0253-2395(2002)02-0120-04

不同类型连续变量量子态离物传送的判据

谢常德,张俊香,彭堃墀

(量子光学与光量子器件国家重点实验室;山西大学光电研究所,山西 太原 030006)

摘 要:文章利用量子力学的测量理论,分析了不同类型连续变量量子态在离物传送过程中的态演化,并推导出输出态的保真度表示式。结果表明对不同类型的输入态,其保真度和保真度的非经典边界有不同的形式。和相干态比较,当输入态为非经典量子态时,为达到同样的保真度必须应用具有高关联度的量子纠缠态光场。

关键词:离物传态;量子纠缠;非经典光场

中图分类号:O413 **文献标识码**:A

量子信息科学是以量子力学基本原理为基础结合信息科学而发展起来的新兴交叉学科。由于量子态具有较大的信息存贮能力,量子信息传输的一个重要方式就是将信息全部贮存于量子态中,通过量子态的传送完成大容量量子信息的传输。近期由于量子离物传态(quantum teleportation)、量子密码通讯(quantum cryptograph)以及量子密集编码(quantum dense coding)等实验的成功,量子信息科学受到更广泛的关注[1-3]。量子离物传态自1993年第一次提出以来[4]一直是物理学界广泛关注的热门课题。1994年Vaidman将离物传态由分离变量量子态扩展到连续变量[5],1998年,Kimble小组在文献[5]的理论基础上,提出了实现连续光场量子离物传态的具体方案[6]。并完成了对相干激光场的离物传送实验[1]。在连续光场态的离物传送实验中,量子纠缠通过腔内光学参量过程产生,由于非线性晶体以及腔镜的损耗不可避免,在真实世界中不可能获得完全关联的量子纠缠态光场,否则腔内将聚集无穷大的能量[7]。因此讨论非理想EPR(Einstein-Podolsky-Rosen)纠缠情况下离物传送过程中输出态的保真度具要重要的现实意义。2000年,Kimble小组首次利用Wigner函数给出了离物传送相干光场的保真度以及相应的量子判据[8]。指出只要保真度大于1/2即可认为已经有部分量子信息从发送站被离物传送至接收站。但是由于对不同的输入场其Wigner函数具有完全不同的形式,尤其是对非经典输入光场,其Wigner函数为奇异函数,很难在Wigner表象中得出精确的保真度解。我们从量子离物传态的基本概念及原理出发,在Schrodinger绘景中以量子测量理论为基础推导不同类型连续变量量子态的离物传送态演化方程,并给出保真度的一般解析式。整个推导与实验测试过程紧密联系,因而为实验设计提供了直接的理论依据,并可对任意态的离物传送保真度给出直接而精确的解。

1 任意连续变量量子态的离物传送

设待传送未知态在相干态表象中的形式为:

$$\hat{\rho}_{in} = |\Psi\rangle_{in}\langle\Psi|, \tag{1}$$

EPR纠缠态是由双模真空压缩态提供,在Fock态表象中可写为:

$$\hat{\rho}_{EPR} = (1-\lambda^2)\sum_{n}\sum_{n'}(-\lambda)^{n+n'}|n,n\rangle_{1,2}\ {}_{1,2}\langle n',n'| \tag{2}$$

其中$\lambda=\tanh r$与压缩参量有关,$\lambda=0$表示无压缩,$\lambda=1$表明压缩度为100%。

收稿日期:2002-03-18

基金项目:国家重点基础研究发展规划基金(2001CB309304)山西省自科科学基金(20011030);山西青年科学基金(20001016).

作者简介:谢常德(1939-),女,四川成都人,教授,博士生导师,1961年毕业于四川大学物理系光学专业,多次到美国和法国的非线性和量子光学实验室进行访问,多次获国家及省科研和教学成果奖,在国内外学术刊物和会议上发表论文百余篇.

整个系统初始时刻的状态为:

$$\hat{\rho}_0 = \hat{\rho}_{EPR} \otimes \hat{\rho}_{in} \tag{3}$$

通过 50:50 分束器将待传送的输入态与量子纠缠的 EPR 光束对之一耦合后,系统的量子态变为:

$$\hat{\rho}_{BS} = \hat{U}^{+}_{BS}\hat{\rho}_0\hat{U}_{BS} \tag{4}$$

其中幺正算符 $\hat{U}_{BS}$代表分束器引入的幺正变换。

$$\hat{U}_{BS} = e^{\frac{\pi}{4}(\hat{a}_{in}\hat{a}^{+} - \hat{a}^{+}_{in}\hat{a})} \tag{5}$$

在相干态表象中将系统密度算符方程展开得:

$$\begin{aligned}\hat{\rho}_{BS} = \{\frac{1}{\pi^2}\sqrt{1-\lambda^2}\iiint d^2\alpha d^2\beta d^2\gamma e^{-\frac{3}{4}|\gamma|^2}e^{-\frac{1}{2}|\beta|^2}e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2}e^{-\alpha\gamma^*}\\ e^{\beta^*\frac{\gamma}{\sqrt{2}}}e^{-\lambda\gamma^*\hat{b}^+}e^{\sqrt{2}\alpha\beta^*}\langle\alpha|\Psi\rangle|\beta>_{in}|\gamma/\sqrt{2}>_1|0>_2\}\otimes h\cdot c\end{aligned} \tag{6}$$

其中 h.c 代表括号{ }中表达式的共轭量。

按量子测量理论,对分束器两输出场模的正交位相振幅分量的测量相当于将 $\hat{a}_{in}$模投影到它的坐标本征态,同时将 $\hat{a}$模投影到它的动量本征态,即可测量 $\hat{a}_{in}$模的实部和 $\hat{a}$模的虚部。

设其相应的实部和虚部为:

$$\hat{X} = \frac{1}{2}(\hat{a}_{in} + \hat{a}^{+}_{in}),\hat{Y} = \frac{1}{2i}(\hat{a} - \hat{a}^{+}) \tag{7}$$

由于 $\hat{X}$和 $\hat{Y}$是实际可测量,因此所有可能的本状态构成正交完备集,即:

$$\begin{cases}\int|X><X|dX = 1\\ \int|Y><Y|dY = 1\end{cases} \tag{8}$$

根据测量理论,对 $\hat{X}$和 $\hat{Y}$进行测量后,使得系统状态塌缩为:

$$\hat{\rho}_M = \frac{\sum_{in,1}\hat{\rho}_{BS}|X><|\otimes|Y><Y|}{\sum_{in,1,2}\hat{\rho}_{BS}|X><|\otimes|Y><Y|} \tag{9}$$

其中广义坐标和动量在相干态表象中的表达式在选取适当位相的情况下写为:

$$\begin{aligned}<X/\alpha> &= \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/4}e^{-X^2+2X\alpha-\frac{1}{2}|\alpha|^2-\frac{1}{2}\alpha^2}\\ <Y/\alpha> &= \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/4}e^{-Y^2\ 2i\alpha Y\ \frac{1}{4}|\alpha|^2+\frac{1}{2}\alpha^2}\end{aligned} \tag{10}$$

将公式(10)、(9)代入(6)并分别对被积函数的实部和虚部进行积分,得出经过 Bell 基测量后的系统归一化状态密度算符:

$$\hat{\rho}_M = \frac{\sqrt{2/\pi}\sqrt{1-\lambda^2}e^{-(X^2+Y^2)}f(X,Y)\hat{D}\{\lambda[\gamma - \sqrt{2}(X-iY)]\}|0>_2\otimes h.c}{P(X,Y)} \tag{11}$$

式(11)的分母为归一化因子,也即代表通过 Bell 基测量后的测量几率:

$$P(X,Y) = (2/\pi)(1-\lambda^2)e^{-2(X^2+Y^2)}f(X,Y)f^*(X,Y) \tag{12}$$

$$f(X,Y) = \frac{1}{\pi}\int d^2\gamma e^{-\frac{1}{2}|\gamma|^2}e^{\sqrt{2}\gamma(X-iY)}e^{\frac{1}{2}X^2|\gamma-\sqrt{2}(X+iY)|^2}<\gamma/\Psi>_{in}$$

显然由式(12)很容易看出:当 $\lambda=1$ 时,也即量子通道为完全理想的 EPR 源时,其测量几率 $P(X,Y)=0$ 也即经过测量后并未测到任何输入态的信息,这正是量子离物传送方案中所强调的基本量子力学原理,这也正是量子不可克隆定理的必要结果。

经过 Bell 基测量后,输入态与 EPR 光束对的第一束光已被探测系统所吸收,转化为经典的光电流信息,与此同时 EPR 光束对的第二束光被相应地塌缩到测量后的系统状态上。

实现量子离物传送的最后步骤是用一分束器将 EPR 的第二束光与一束已被经典测量信息调制了的强相干光场耦合,当分束器的反射率很高而且相干光场很强时,这一耦合过程就相当于对 EPR 的第二束光作一幺正平移变换 $\hat{D}[\sqrt{2}g(X-iY)]$,g 为系统的经典增益,即由 Bell 基测量得到的经典信号的增益。此时经分束器反射的 EPR 的第二束光的状态变为:

$$\hat{\rho}_M = \frac{\sqrt{2/\pi}\ \sqrt{1-\lambda^2}e^{-(X^2+Y^2)}f(X,Y)\hat{D}[\sqrt{2}\,g(X-iY)\hat{D}\{\lambda[\gamma-\sqrt{2}\,(X-iY)]\}\ 0>_2 \otimes h.c}{P(X,Y)} \tag{13}$$

在理想情况下、也即 EPR 源是压缩度为 100%的双模压缩真空态光场 ($\lambda=1$),而且系统的增益 $g=1$ 时,由(13)我们得到:

$$\hat{\rho}_M = \hat{\rho}_2 = \hat{\rho}_{in}$$

这一结果表明,当量子态经过离物传送的三个标准化过程即制备量子通道或 EPR 源,Bell 基测量以及平移变换操作后、待传送的输入态将在发送站被提取信息后完全“消失”,而在遥远的输出端精确再构。应该注意的是被传送的仅仅是量子态的信息,而不是量子实体,这就是量子离物传态与经典输送的本质区别。对实际系统而言,由于不可能拥有完全理想的 EPR 源,所以输入态不可能被精确再构。只有部分量子信息通过非局域量子通道由发送站传至接收站。在这种情况下我们必须引入保真度的概念来定量描述量子态的离物传送质量。

2 量子态的离物传送的保真度

在实际的系统中,ERP 源为有限压缩度的双模压缩态光场($\lambda<1$),同时由于损耗的存在增益总是小于 1($g<1$)。此时,由公式(13)可知,经过有限时间的测量,其输出态中包含部分 X 和 Y 的测量信息,而此测量信息是由测量几率所决定,不是人为所能控制的,那么为了提高测量结果的可靠度,必须进行无限长时间的测量,或施行无限次测量,以消除短时测量带来的随机误差。最终的测量结果为对(13)中所有可能 X 和 Y 积分。

$$\hat{\rho}_M = \int \hat{\rho}_M \mathrm{d}X\mathrm{d}Y \tag{14}$$

用保真度(f)评价传送过程中输入态被再构的精确度:

$$f = <\Psi|\hat{\rho}_M|\Psi>_{in} \tag{15}$$

以下我们分别导出不同类型输入态的保真度表示式:

①输入态为一相干态$|\varepsilon>$,则有[9]

$$f = <\varepsilon|\hat{\rho}_M|\varepsilon> = \frac{1-\lambda^2}{1+g^2-2g\lambda}e^{-(1-g)^2\frac{1-\lambda^2}{1+g^2-2g\lambda}|\varepsilon|^2} \tag{16}$$

在量子通道或经典通道完全堵塞,即($\lambda=0$,$g\neq1$(EPR 源物量子纠缠),或 $g=0$,$\lambda\neq1$(无经典信号)两种情况下,均可得 $f=1/2$。一般而言,我们可以采用经典技术使 $g\to1$,而称 $f=1/2$ 是由 EPR 纠缠度(λ)决定的经典极限。当 $f>1/2$ 时我们认为已有部分相干态的量子信息通过量子通道传送到接受站并被部分地再现。因此相干态量子离物传送的判据是:$f_{coherent}>1/2$.

②输入态为单模压缩态,此时,

$$|\Psi>_{in} = |\alpha,\zeta\rangle = \hat{S}(\zeta)|\alpha\rangle \tag{17}$$

$\hat{S}(\zeta)=e^{-\frac{1}{2}(\zeta a_{in}^{+2}-\zeta^* a_{in}^2)}$为压缩算符。$\zeta=r_0e^{i\varphi_0}$为压缩参量。由式(15)可得到保真度的表示式:

$$\begin{aligned} f_{squeezing} = {} & \frac{(1-\lambda^2)}{\cosh^2 r_0(1-\lambda^2\tanh^2 r_0)\ \sqrt{AB}} \\ & \exp\{-2(1-\frac{\lambda}{\cosh^2 r_0(1-\lambda^2\tanh^2 r_0)})|\alpha|^2\} \\ & \exp\{(\tanh r_0-\frac{\lambda^2\tanh r_0}{\cosh^2 r_0(1-\lambda^2\tanh^2 r_0)})(\alpha^2+\alpha^{*2})\} \\ & \exp\{\frac{(1-\lambda)^2(1+g)^2(1-\lambda\tanh r_0)}{4A\cosh^2 r_0(1-\lambda^2\tanh^2 r_0)^2}(\alpha+\alpha)^2\} \\ & \exp\{\frac{(1-\lambda)^2(1+g)^2(1+\lambda\tanh r_0)}{4B\cosh^2 r_0(1-\lambda^2\tanh^2 r_0)^2}(\alpha-\alpha)^2\} \end{aligned} \tag{18}$$

其中 $A=(1-\lambda^2)+(g-\lambda)^2(1+\tanh r_0)+\frac{\tanh r_0[(1-g\lambda)-\lambda(g-\lambda)\tanh r_0]^2}{1-\lambda^2\tanh^2 r_0}$

$B=(1-\lambda^2)+(g-\lambda)^2(1-\tanh r_0)+\frac{\tanh r_0[(1-g\lambda)+\lambda(g-\lambda)\tanh r_0]^2}{1-\lambda^2\tanh^2 r_0}$

当 $\lambda=0$,$g=1$ 时,得到离物传送正交压缩态的经典极限为:

$$f_{squeezing} = \frac{1}{2\cosh^2 r_0\ \sqrt{1+\tanh^2 r_0}} \tag{19}$$

对比(16)式可以看到其保真度的经典极限不再像传送相干态时为 1/2,而与输入态的压缩度有关,随压缩度的增加而减小,与此同时保真度(18)式以更快的斜率降低,也就是说传送压缩态比传送相干态要求更高的量子纠缠。

③输入态为 Fock 态,即理想的光子数压缩态此时

$$|\Psi\rangle_m = |m\rangle \tag{20}$$

由保真度的定义(15)式推导得经典极限变为：

$$f_{fock} = \frac{(2m)!}{2^{2m+1}(m!)^2} \tag{21}$$

它随光子数的增加而减小。

由此可见，对不同的输入态，其量子离物传送的保真度各有不同。特别是对非经典态，其保真度会随非经典深度而递减。

3 结论

本文将量子测量理论应用于连续变量量子态的离物传送讨论中，给出了量子态传送的演化方程，对不同类型的输入态在离物传送过程中的保真度进行了分析与比较。我们的计算指出，当被传送的量子态为不同类型的光场时，应该用不同的判据来衡量量子离物传送的质量。尤其对非经典态，保真度不仅依赖于EPR关联同时也依赖于被传送态自身的量子特性，如压缩度，光子数等。

参考文献：

[1] FURUSAWA A, SORENSEN J L, BRAUNSTEIN S L, Fuchs C A, Kimble H J, Polzik E S. Unconditional quantum teleportation[J]. *Science*, 1998, **282**: 706-709.

[2] EKERT A K. Quantum cryptography based on Bell's theorem[J]. *Phys Rev Lett*, 1991, **67**: 661-663.

[3] LI X Y, PAN Q, JING J T, ZHANG J, XIE C D, PENG K C. quantum dense coding exploiting a bright Einstein-Podolsky-Rosen beam[J]. *Phys Rev Lett*, 2002, **88**: 047904 (1-4).

[4] BENNETT C H, BRASSARD G, CREPEAU C, JOZSA R, PERES A AND, WOOTERS W K. Teleporting an Unknown Quantum State via Dual Classical and Einstein-Podolsky-Rosen Channels[J]. *Phys Rev Let*, 1993, **70**: 1895-1899.

[5] VAIDMAN L. Teleportation of quantum states[J]. *Phys Rev A*, 1994, **49**: 1473-1476.

[6] BRAUNSTEIN S L, KIMBLE H J. Teleportation of continuous quantum variables[J]. *Phys Rev Lett*, 1998, **80**: 869-872.

[7] YAMAMOTO Y, MACHIDA S, NILSSON O. Amplitude squeezing in a pump-noise-suppressed laser oscillator[J]. *Phys Rev A*, 1986, **34**: 4025-4042.

[8] BRAUNSTEIN S L, FUCHS C A, KIMBLE H J. Criteria for continuous-variable quantum teleportation[J]. *J Mod Opt*, 2000, **47**: 267-272.

[9] ZHANG J X, XIE C D, LI F L, ZHU S Y, ZUBAIRY M S. The state evolution formulation of teleportation for continuous variables[J]. *Europhys Lett*, 2001, **56**: 478-484.

Criteria of Quantum Teleportation for Different Continuous Variables

XIE Chang-de, ZHANG Jun-xiang, PENG Kun-chi

(The State Key Laboratory of Quantum Optics and Quantum Optics Devices; Institute of Opto-Electronics, Shanxi University, Taiyuan 030006, *China)*

Abstract: The state evolution of quantum teleportation for different types of continuous variables is mathematically analyzed based on the measurement theory of quantum mechanics. The fidelities in different systems are deduced. Our results show that for different input state the expressions of fidelity and the nonclassical boundary are different. Comparing with the coherent state, when the input state is a nonclassical state higher quantum entanglement is required for obtaining the same fidelity.

Key words: teleportation; quantum entanglement; nonclassical state